Chương 1

HÀM SỐ - GIỚI HẠN - LIÊN TỤC

§1. Tập các số thực

1.1 Khái niệm về số hữu tỉ, vô tỉ và số thực

Ta thường gặp các tập số sau đây :

i) *Tập hợp các số tự nhiên* $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

ii) *Tập các số nguyên* $\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots\}$.

iii) *Tập các số hữu tỉ* $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

Mỗi số hữu tỉ đều có thể biểu diễn dưới dạng một số thập phân hữu hạn hay vô hạn tuần hoàn. Chẳng hạn

$$\frac{1}{4} = 0,25\ ; \quad \frac{4}{3} = 1,333\ldots = 1,\overline{3}\ ; \quad \frac{17}{11} = 1,545454\ldots = 1,\overline{54}\,.$$

Người ta nhận thấy tập số hữu tỉ chưa đầy đủ. Chẳng hạn, không có số hữu tỉ nào biểu diễn tỉ số giữa chu vi và đường kính của đường tròn (số π) và độ dài đường chéo của một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng đơn vị (số $\sqrt{2}$).

iv) *Tập các số vô tỉ* : Một số biểu diễn dưới dạng một số thập phân vô hạn không tuần hoàn được gọi là một số vô tỉ. Chẳng hạn

$$\sqrt{2} = 1,41421356...\ ; \quad e = 2,7182818284...\ ; \quad \pi = 3,1415926...$$

là các số vô tỉ.

Tập các số vô tỉ được kí hiệu là $\mathbb{I}$.

v) *Tập các số thực* : Các số hữu tỉ và vô tỉ gọi chung là số thực. Tập các số thực kí hiệu là $\mathbb{R}$. Ta có

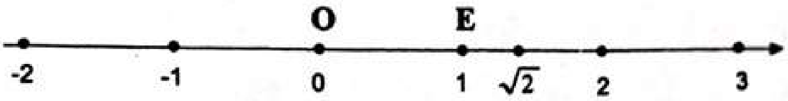
* $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

* *Tính trù mật :* Cho hai số thực x, y với $x < y$. Bao giờ cũng tồn tại ít nhất một số hữu tỉ q sao cho $x < q < y$.

1.2 Biểu diễn hình học của số thực

Ta có thể biểu diễn hình học các số thực bởi các điểm trên đường thẳng. Chọn một điểm O trên đường thẳng (gọi là gốc) để biểu diễn số 0 và một điểm E với $E \neq O$ để biểu diễn số 1. Tia $\overrightarrow{OE}$ gọi là tia dương. Tia đối của nó gọi là tia âm. Số thực $r \neq 0$ bất kì được biểu diễn bởi điểm M với $OM = |r|OE$; trong đó M thuộc tia dương nếu $r > 0$ và M thuộc tia âm nếu $r < 0$. Đường thẳng dùng để biểu diễn số thực được gọi là *đường thẳng thực*. Do sự tương ứng một-một giữa số thực và điểm trên đường thẳng nên các số thực còn được gọi là các điểm.



1.3 Khoảng số thực

Các tập hợp sau được gọi là các khoảng số thực :

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (khoảng mở),

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (khoảng đóng),

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (khoảng nửa đóng, nửa mở),

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (khoảng nửa đóng, nửa mở),

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ (khoảng mở vô hạn),

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ (khoảng đóng vô hạn),

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ (khoảng mở vô hạn),

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ (khoảng đóng vô hạn).

1.4 Lân cận của một điểm

Cho $\varepsilon > 0$. Ta gọi $\varepsilon -$ lân cận của x_0 là khoảng $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ và lân cận của x_0 là một tập chứa một $\varepsilon -$ lân cận nào đó của x_0.

1.5 Giá trị tuyệt đối

□ **Định nghĩa 1** Giá trị tuyệt đối của số thực x, kí hiệu $|x|$, là số thực không âm được xác định như sau :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{nếu} \quad x < 0. \end{cases}$$

• **Ví dụ 1** $|3,2| = 3,2$; $|-1| = 1$.

• **Ý nghĩa hình học**

$|x|$ là khoảng cách từ gốc đến điểm x, $|x-y|$ là khoảng cách giữa hai điểm x và y.

◇ **Tính chất**

i) $|x| \geq 0$.

ii) $-|x| \leq x \leq |x|$.

iii) $|x| \leq y, y \geq 0 \;\Leftrightarrow\; -y \leq x \leq y$.

iv) $|x| > y, y > 0 \;\Leftrightarrow x < -y$ hoặc $x > y$.

v) $|xy| = |x||y|$; $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$.

vi) $|x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$.

§2. Hàm số

2.1 Khái niệm hàm số

□ **Định nghĩa 2** Cho tập $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$. *Hàm số* (hay *hàm*) f xác định trên X là một quy tắc cho tương ứng mỗi số $x \in X$ với một số thực xác định duy nhất $f(x)$.

Kí hiệu $f : x \mapsto f(x)$ hay $y = f(x)$.

X được gọi là *miền xác định*, kí hiệu là D_f hay $D(f)$. Nếu hàm f được cho bởi biểu thức giải tích $y = f(x)$ và không chỉ rõ miền xác định thì miền xác định D_f là tập các số thực làm cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Tập hợp $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ được gọi là miền giá trị của hàm f.

Ta gọi x là *biến độc lập* (hay *đối số*), y là *biến phụ thuộc* (hay *hàm*).

Giá trị của hàm f tại $x = a$ được kí hiệu là $f(a)$ hay $f(x)|_{x=a}$.

• **Ví dụ 2** Hàm $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ có miền xác định $D = (0, +\infty)$ và miền giá trị $f(D) = (0, +\infty)$.

• **Ví dụ 3** Giá đi xe taxi trong thành phố được tính như sau : trong $2km$ đầu tiên trả 20 000đ, $3km$ kế tiếp phải trả thêm 8 000đ/km, sau km thứ năm phải trả thêm 5 000đ/km.

Gọi x là số km taxi đã chạy và $f(x)$ là giá tiền phải trả ứng với x km đó. Ta có

$$f(x) = \begin{cases} 20\,000 & \text{nếu} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 20\,000 + 8\,000(x-2) & \text{nếu} \quad 2 < x \leq 5 \\ 44\,000 + 5\,000(x-5) & \text{nếu} \quad x > 5. \end{cases}$$

Giá đi 4 km là $f(4) = 20\,000 + 2.8\,000 = 36\,000đ$.

Giá đi $9km$ là $f(9) = 44\,000 + 4.5\,000 = 64\,000đ$.

• **Ví dụ 4** Có hai đơn vị phổ biến để đo nhiệt độ: Celcius (C) và Fahrenheit (F). Nước đông đặc ở 0^oC và 32^oF. Nước sôi ở 100^oC và 212^oF.

a) Giả sử nhiệt độ Celcius T_C và nhiệt độ Fahrenheit T_F liên hệ với nhau bởi một phương trình tuyến tính. Tìm sự biểu diễn T_F như là hàm theo T_C.

b) Nhiệt độ bình thường của người là 37°C. Hỏi ở nhiệt độ F nó là bao nhiêu ?

Giải

a) Vì T_C và T_F liên hệ với nhau một cách tuyến tính nên ta có thể giả sử $T_F = aT_C + b$. Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 32 = 0.a + b \\ 212 = 100.a + b. \end{cases}$$

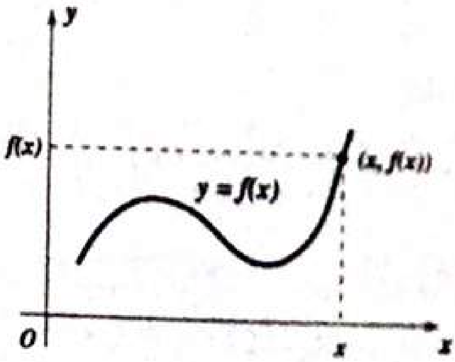
Giải hệ ta được $a = \dfrac{9}{5}, b = 32$. Do đó

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32.$$

b) Ta có $T_F(37) = \frac{9}{5}.37 + 32 = 98,6$ nên ở nhiệt độ F nhiệt độ bình thường của người là 98,60°F.

• **Đồ thị của hàm số**

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ với miền xác định X là tập hợp các điểm $(x, f(x))$ trong mặt phẳng toạ độ với $x \in X$.



- **Các phương pháp cho hàm**

i) Phương pháp giải tích

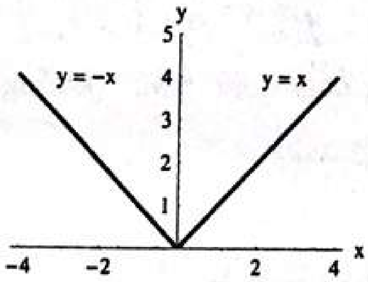
Hàm được cho dưới dạng một hay nhiều biểu thức giải tích.

- **Ví dụ 5** Hàm $y = \sqrt{1 - x^2}$ có miền xác định $D = [-1, 1]$ và miền giá trị $f(D) = [0, 1]$.

- **Ví dụ 6** Hàm trị tuyệt đối

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{nếu} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{nếu} \quad x < 0 \end{cases}$$

xác định trên $D = (-\infty, +\infty)$ và có miền giá trị $f(D) = [0, +\infty)$.



ii) Phương pháp bảng

Hàm được cho bởi một bảng gồm một hàng (cột) ghi các giá trị của đối số, một hàng (cột) ghi các giá trị tương ứng của hàm. Ví dụ bảng giá trị của các hàm số $y = x^2$, $\frac{1}{x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\ln x \ldots$

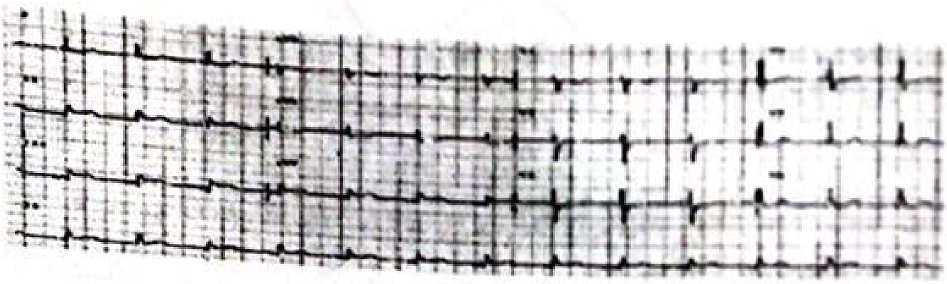
- **Ví dụ 7** Dân số trung bình của Việt Nam qua các mốc thời gian từ năm 1996 đến 2009 (đơn vị tính là triệu người) được cho bởi bảng

1976	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2009
49,160	53,722	59,872	66,016	71,995	77,635	83,106	85,700

Trong bảng này, năm là biến độc lập, dân số là biến phụ thuộc và bảng biểu diễn dân số như là hàm của năm.

iii) Phương pháp đồ thị

Hàm được cho bằng đồ thị. Ví dụ điện tâm đồ trong y học.



2.2 Các tính chất đơn giản của hàm

a) Hàm đơn điệu

□ **Định nghĩa 3** Cho hàm f xác định trên tập X.

f được gọi là *hàm tăng (giảm)* trên X nếu $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ thì ta có $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

f được gọi là *hàm tăng (giảm) nghiêm ngặt* trên X nếu $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ thì ta có $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Hàm tăng (không giảm) hoặc giảm (không tăng) được gọi là *hàm đơn điệu*.

• **Ví dụ 8**

i) Hàm $f(x) = x^3$ tăng trên $\mathbb{R}$.

ii) Phần nguyên của x, kí hiệu $[x]$, là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, tức là số nguyên thoả $[x] \leq x < [x] + 1$. Ví dụ $[-1,9] = -2$, $[-3,1] = -4$.

Hàm phần nguyên $f(x) = [x]$ không giảm trên $\mathbb{R}$.

◇ **Nhận xét** Đồ thị của hàm tăng là một đường đi lên từ trái sang phải và đồ thị của hàm giảm là một đường đi xuống từ trái sang phải.

b) Hàm chẵn, lẻ

□ **Định nghĩa 4** Cho hàm f xác định trên tập X và X nhận O làm tâm đối xứng.

f được gọi là hàm số chẵn nếu $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in X$.

f được gọi là hàm số lẻ nếu $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in X$.

• **Ví dụ 9**

i) Các hàm $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$, $f(x) = \cos x$ là các hàm chẵn.

ii) Các hàm $f(x) = x^3$, $f(x) = \sin x$ là các hàm lẻ.

◇ **Nhận xét**

Đồ thị hàm số lẻ đối xứng qua gốc toạ độ.

Đồ thị hàm số chẵn đối xứng qua trục tung.

c) Hàm bị chặn

□ **Định nghĩa 5** Cho hàm f xác định trên tập X.

f được gọi là bị chặn trên (dưới) trên tập X nếu tồn tại một số M sao cho $f(x) \leq M$ $(f(x) \geq M)$, $\forall x \in X$.

$f(x)$ được gọi là bị chặn trên tập X nếu tồn tại $M > 0$ sao cho $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in X$.

◇ **Nhận xét** f bị chặn khi và chỉ khi f bị chặn trên và f bị chặn dưới.

• **Ví dụ 10**

i) Hàm $y = \sin x$ bị chặn trên $\mathbb{R}$ vì $|\sin x| \leq 1$.

ii) Hàm $y = \dfrac{1}{x}$ bị chặn dưới trong khoảng $(0, 1)$ vì $\dfrac{1}{x} > 0$, $\forall x \in (0, 1)$.

d) Hàm tuần hoàn

□ **Định nghĩa 6** Cho hàm f xác định trên tập X.

f được gọi là hàm tuần hoàn trên X nếu tồn tại hằng số $l \neq 0$ sao cho

$$f(x + l) = f(x), \quad \forall x \in X. \tag{1.1}$$

Nếu l thoả (1.1) thì mọi số dạng nl $(n \in \mathbb{Z})$ cũng thoả (1.1). Số $l > 0$ nhỏ nhất thoả (1.1) được gọi là chu kì của hàm $f(x)$.

• **Ví dụ 11**

i) Các hàm $y = \sin x$, $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

ii) Hàm hằng $y = C$ tuần hoàn không có chu kì.

iii) Hàm $y = x^2$ không tuần hoàn.

⊙ **Chú ý** Vì giá trị của hàm tuần hoàn lặp lại theo từng chu kì nên ta chỉ cần xét đồ thị của hàm tuần hoàn trong một khoảng có độ dài bằng chu kì.

2.3 Tổng, hiệu, tích và thương các hàm

Ta có thể thực hiện các phép toán số học lên các hàm f và g. Với $x \in D_f \cap D_g$ ta định nghĩa các hàm $f+g, f-g, fg$ và $\frac{f}{g}$ bởi các công thức :

i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,

ii) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$,

iii) $(fg)(x) = f(x).g(x)$,

iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$.

2.4 Hàm hợp

Trong phần này ta nghiên cứu một phép toán phức tạp hơn trên các hàm.

□ **Định nghĩa 7** Giả sử $y = f(u)$ là hàm số của biến số u và $u = g(x)$ là hàm số của biến số x. Khi đó $y = f(u) = f[g(x)]$ gọi là *hàm số hợp* của biến độc lập x thông qua biến trung gian u, kí hiệu $f \circ g$.

Ta có

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)], \quad x \in D_g.$$

⊙ **Chú ý** Ta kí hiệu $f_n(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n}$.

◇ **Nhận xét**

i) Hàm hợp $f \circ g$ xác định với mọi x tại đó $g(x)$ xác định và $g(x)$ thuộc miền xác định của f, tức là

$$D(f \circ g) = \{x : x \in D(g), g(x) \in D(f)\}.$$

ii) Nói chung $f \circ g \neq g \circ f$.

• **Ví dụ 12** Cho các hàm $f(x) = 2x^2 + 1$ và $g(x) = \sqrt{x-1}$. Ta có

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 2(g(x))^2 + 1 = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$.

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{f(x) - 1} = \sqrt{(2x^2+1) - 1} = \sqrt{2}|x|$.

Ta thấy $(g \circ f)(0) = 0 \neq (f \circ g)(0) = -1$.

2.5 Hàm ngược

□ **Định nghĩa 8** Giả sử hàm f xác định trên X và có miền giá trị là Y và là hàm $1-1$, tức là nếu $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$. Khi đó với mỗi $y \in Y$ tồn tại duy nhất $x \in X$ sao cho $f(x) = y$.

Coi $x \in Y$ là biến độc lập thì với mọi $x \in Y$ tồn tại duy nhất $y = f^{-1}(x) \in X$ để $f(y) = x$. Ta có hàm $y = f^{-1}(x)$, $x \in Y$, gọi là hàm ngược của hàm $y = f(x)$.

⊙ **Chú ý** Chỉ có hàm $1-1$ mới có hàm ngược.

• **Ví dụ 13**

i) Hàm $y = x^3$ có hàm ngược $x = \sqrt[3]{y}$, cả hai cùng xác định trên $\mathbb{R}$.

ii) Hàm $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có miền giá trị $f(D) = (0, +\infty)$. Hàm này có hàm ngược $x = \log_a y$ xác định trong khoảng $D = (0, +\infty)$ và có miền giá trị $f(D) = \mathbb{R}$.

iii) Hàm $y = x^2$ không có hàm ngược trên $\mathbb{R}$ vì không là hàm $1-1$.

⋄ **Nhận xét**

i) Nếu f tăng (giảm) thì f^{-1} cũng tăng (giảm).

ii) Miền xác định (miền giá trị) của f^{-1} là miền giá trị (miền xác định) của hàm f.

iii) Đồ thị của hàm f và f^{-1} đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

2.6 Các hàm sơ cấp

a) Các hàm sơ cấp cơ bản

i) Hàm luỹ thừa : $y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

* Nếu α vô tỉ ta quy ước xét : $x \geq 0$ nếu $\alpha > 0$ và $x > 0$ nếu $\alpha < 0$.

* Miền xác định của hàm phụ thuộc vào α :

\+ Các hàm $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3, \ldots$ xác định với mọi x ;

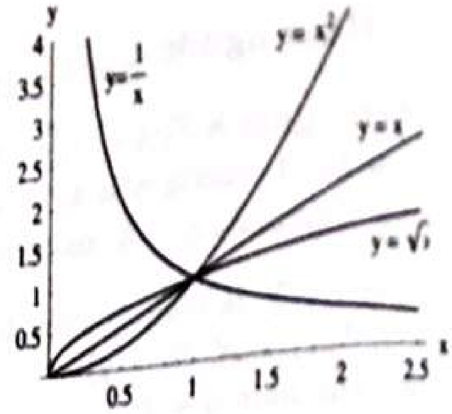
\+ Các hàm $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = \dfrac{1}{x^3}, \ldots$ xác định với mọi $x \neq 0$;

\+ Hàm $y = \sqrt{x}$ xác định với mọi $x \geq 0$;

+ Hàm $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ xác định với mọi $x > 0$;

+ Hàm $y = \sqrt[3]{x}$ xác định với mọi x.

Đồ thị của tất cả các hàm $y = x^{\alpha}$ đều đi qua điểm $(1,1)$, chúng đi qua gốc O nếu $\alpha > 0$ và không đi qua O nếu $\alpha < 0$.

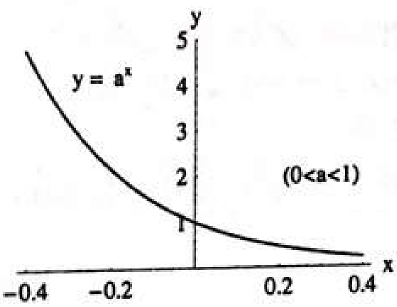


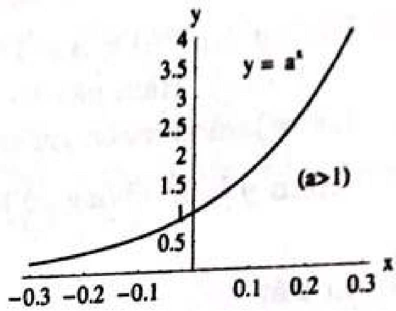
ii) Hàm mũ : $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$

* Hàm xác định với mọi x và luôn nhận giá trị dương.

* Hàm tăng khi $a > 1$ và giảm khi $0 < a < 1$.

* Đồ thị luôn đi qua điểm $(0,1)$, nằm phía trên trục Ox và tiệm cận với trục Ox.





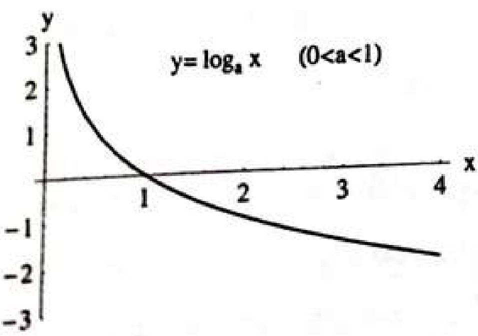
iii) Hàm logarit: $y = log_a x$ $(0 < a \neq 1)$

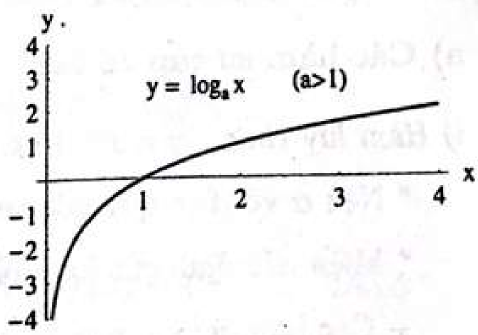
* Hàm logarit làm hàm ngược của hàm mũ.

* Hàm xác định với mọi $x > 0$.

* Hàm tăng khi $a > 1$ và giảm khi $0 < a < 1$.

* Đồ thị đối xứng với đồ thị của hàm $y = a^x$ qua đường phân giác thứ nhất, luôn đi qua điểm $(1,0)$, nằm bên phải trục Oy và tiệm cận với Oy.





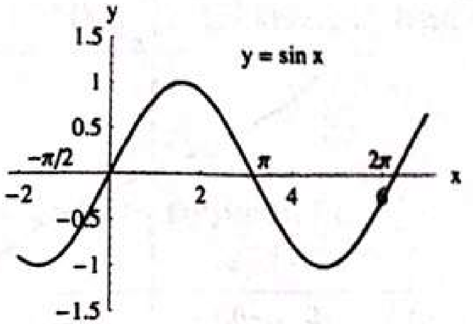
iv) Các hàm lượng giác

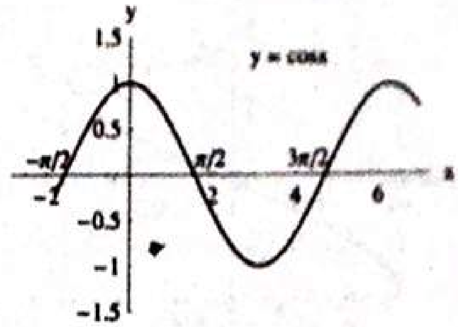
α) Hàm $y = \sin x$

Hàm xác định với mọi x, có miền giá trị là $[-1, 1]$, là hàm lẻ, tuần hoàn với chu kì 2π.

β) Hàm $y = \cos x$

Hàm xác định với mọi x, có miền giá trị là $[-1, 1]$, là hàm chẵn, tuần hoàn với chu kì 2π.



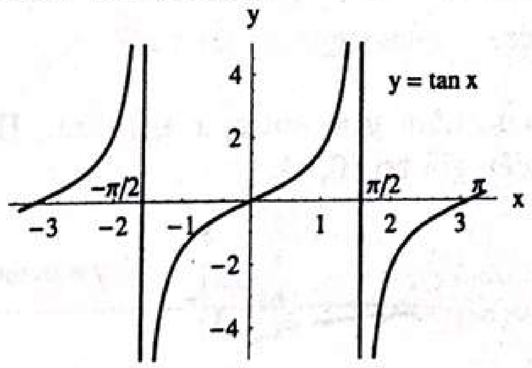


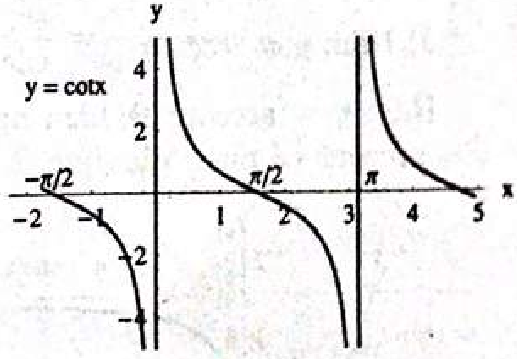
γ) Hàm $y = \tan x$

Hàm có miền xác định là $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, miền giá trị $\mathbb{R}$, là hàm lẻ, tuần hoàn với chu kì π.

δ) Hàm $y = \cot x$

Hàm có miền xác định là $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, miền giá trị $\mathbb{R}$, là hàm lẻ, tuần hoàn với chu kì π.





v) Các hàm lượng giác ngược

α) Hàm $y = \arcsin x$

Hàm $y = \sin x$ tăng nghiêm ngặt trên đoạn $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ và có miền giá trị là $[-1, 1]$. Khi đó hàm này có hàm ngược, được kí hiệu là $y = \arcsin x$, với miền xác định $[-1, 1]$ và miền giá trị $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ta có

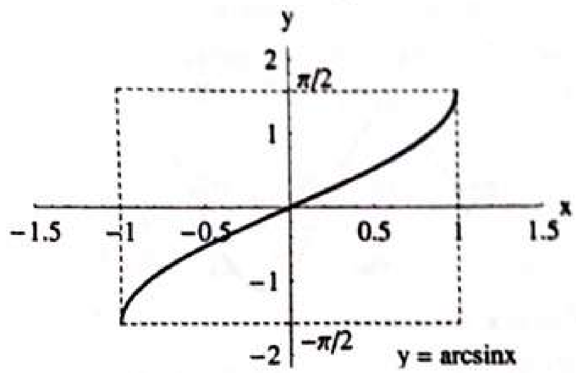
$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x, \quad y \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

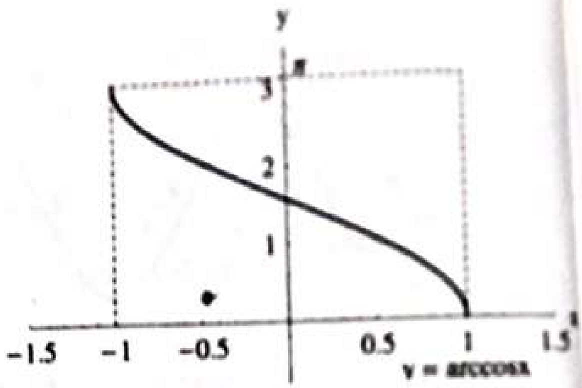
Chú ý rằng Arcsin$x$ là kí hiệu tập tất cả các giá trị y sao cho $\sin y = x$ còn $y = \arcsin x$ là giá trị duy nhất $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ để $\sin y = x$.

β) Hàm $y = \arccos x$

$y = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$ là hàm ngược của hàm $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$. Miền xác định của hàm $y = \arccos x$ là $[-1, 1]$, miền giá trị là $[0, \pi]$. Ta có

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x, \quad y \in [0, \pi].$$





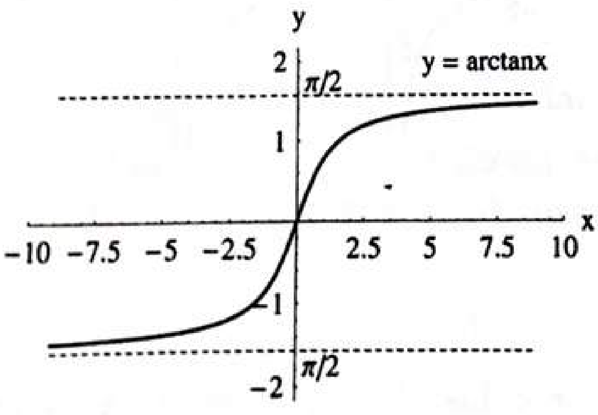
* Nhận xét: $\boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}}$

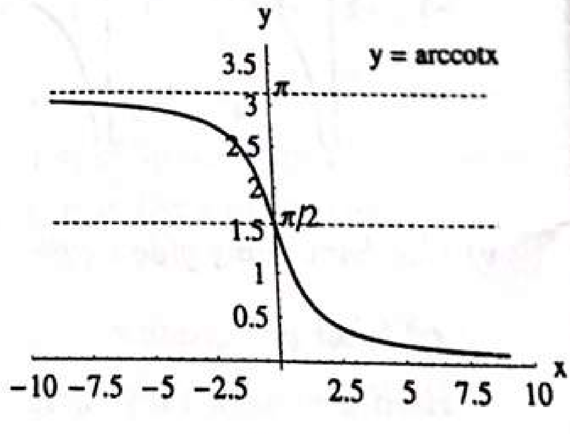
γ) Hàm $y = \arctan x$

Hàm $y = \arctan x$ là hàm ngược của hàm $y = \tan x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Hàm $y = \arctan x$ có miền xác định là $\mathbb{R}$, miền giá trị $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

δ) Hàm $y = \text{arccot} x$

Hàm $y = \text{arccot} x$ là hàm ngược của hàm $y = \cot x$, $x \in (0, \pi)$. Hàm $y = \text{arccot} x$ có miền xác định là $\mathbb{R}$, miền giá trị $(0, \pi)$.





* Nhận xét : $\boxed{\arctan x + \text{arccot} x = \frac{\pi}{2}}$

b) Hàm sơ cấp

□ **Định nghĩa 9** Hàm sơ cấp là hàm được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép lấy tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp đối với các hàm sơ cấp cơ bản và các hằng.

- **Ví dụ 14**

i) Hàm $y = \dfrac{e^x + \sin x}{\sqrt{x^2+1}}$ là hàm sơ cấp.

ii) Hàm $y = |x|$ không là hàm sơ cấp.

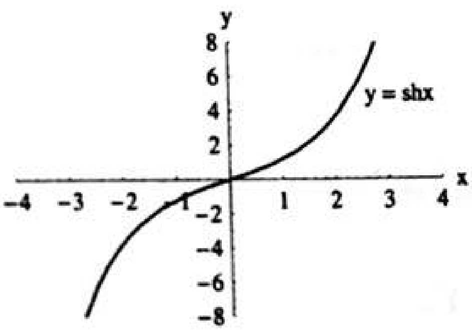
c) Các hàm hyperbolic

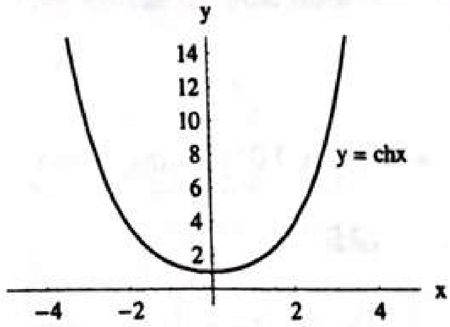
i) Hàm sin hyperbolic : $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

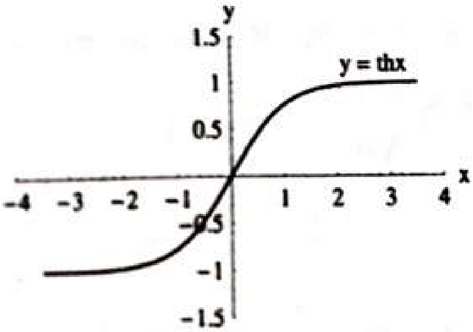
ii) Hàm cosin hyperbolic : $\mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

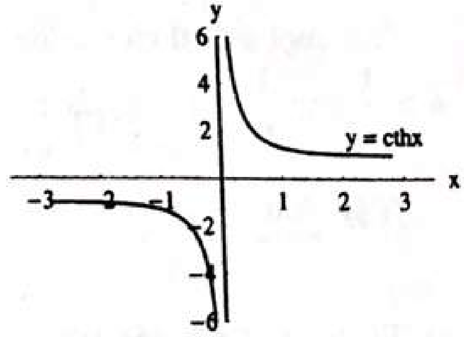
iii) Hàm tan hyperbolic : $\mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

iv) Hàm cotan hyperbolic : $\mathrm{cth}x = \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.









§3. Giới hạn

3.1 Giới hạn của dãy số

a) Khái niệm về dãy số

□ **Định nghĩa 10** Cho hàm f xác định trên tập $\mathbb{N}$. Khi đó tập các giá trị $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$ lập thành một *dãy số* (hay *dãy*).

Đặt $x_n = f(n)$, ta được dãy số $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, kí hiệu là $\{x_n\}_n$.

x_n gọi là số hạng tổng quát (hay số hạng thứ n) của dãy.

• **Ví dụ 15**

i) $\{(-1)^n\}_n = \{-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots\}$.

ii) $\{\frac{1}{n}\}_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$.

b) Giới hạn của dãy số

□ **Định nghĩa 11**

Số a (hữu hạn) được gọi là giới hạn của dãy số $\{x_n\}$ khi n dần ra vô cùng nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ bé tuỳ ý tồn tại số tự nhiên N phụ thuộc vào ε sao cho với mọi $n > N$ ta có $|x_n - a| < \varepsilon$. Kí hiệu

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{hay} \quad x_n \to a.$$

• **Ví dụ 16** Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.

Giải

Ta có $|x_n - 1| = \left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n}$.

Với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, ta chọn $N = [\frac{1}{\cancel{n}}]$ ε. Khi đó với mọi $n > N$ thì $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ hay $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Ta suy ra $|x_n - 1| < \varepsilon$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.

c) Tính chất và các phép tính về giới hạn của dãy số

Dùng định nghĩa giới hạn của dãy số, ta chứng minh được các định lí sau:

△ **Định lí 1**

i) Nếu một dãy số có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

ii) Nếu một dãy số có giới hạn thì nó bị chặn.

△ **Định lí 2** *Nếu các dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ có giới hạn thì*

i) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n . y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n . \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ $\quad \left(\text{với } \lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0\right)$.

△ **Định lí 3** *Cho ba dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$. Nếu*

i) $x_n \le y_n \le z_n,\ \forall n,$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

thì dãy $\{y_n\}$ có giới hạn và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

d) Dãy bị chặn, dãy đơn điệu và số e

△ **Định lí 4**

i) Nếu dãy số $\{x_n\}_n$ tăng và bị chặn trên thì nó có giới hạn.

ii) Nếu dãy số $\{x_n\}_n$ giảm và bị chặn dưới thì nó có giới hạn.

• **Sự tồn tại của** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Xét $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Theo công thức khai triển nhị thức, ta có

$$\begin{aligned}
x_n &= 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}.\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.\frac{1}{n^3} + \dots \\
&\quad + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 2.1}{n!}.\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots \\
&\quad + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \dots \\
&\quad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Đối với $x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, khai triển của nó gồm $n+2$ số hạng, trong đó $n+1$ số hạng đầu của khai triển có dạng như trong (1.2), chỉ có thừa số dạng $(1 - \frac{i}{n})$ được thay bởi $(1 - \frac{i}{n+1})$.

Ta thấy $n+1$ số hạng đầu tiên trong khai triển của x_{n+1} đều lớn hơn các số hạng trong khai triển của x_n. Ngoài ra, số hạng thứ $n+2$ trong khai triển của x_{n+1} là số dương. Do đó $x_{n+1} > x_n$. Vì vậy dãy $\{x_n\}$ là dãy số tăng.

Từ (1.2) ta lại có

$x_n < 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{k!} + \ldots + \dfrac{1}{n}$, (do $1 - \frac{i}{n} < 1,\ i = \overline{1,n}$).

Mặt khác, vì $n! = n(n-1)\ldots 2.1 > 2^{n-1}$, $\forall n \geq 3$, nên

$$x_n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Tổng trong dấu ngoặc ở vế phải là một cấp số nhân với số hạng đầu tiên là 1 và công bội là $\frac{1}{2}$; nó có giá trị bằng $\frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] < 2, \forall n$.

Do đó $x_n < 3, \forall n$.

Vì dãy $\{x_n\}$ tăng và bị chặn trên nên tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Đặt $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Số e này được chứng minh là số vô tỉ và $e \simeq 2,71828$.

3.2 Giới hạn của hàm tại một điểm

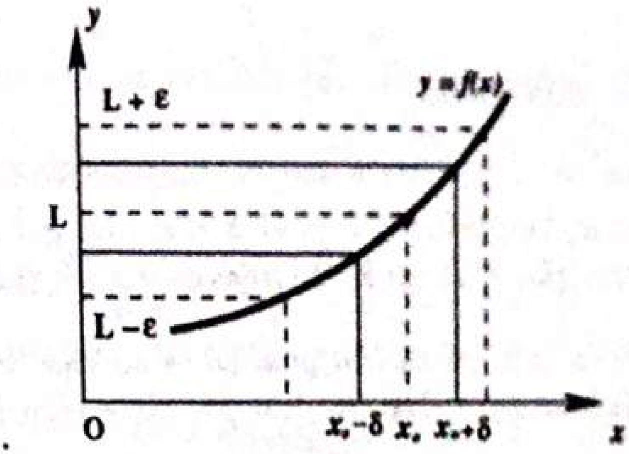
□ **Định nghĩa 12** (*Ngôn ngữ* ε, δ) Giả sử hàm $f(x)$ xác định ở lân cận x_0, không nhất thiết xác định tại x_0.

Số L (hữu hạn) được gọi là giới hạn của hàm $y = f(x)$ khi x dần đến x_0 nếu $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho $\forall x \in X$, $0 < |x - x_0| < \delta$ ta có $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

⋄ **Nhận xét** Ta có thể phát biểu định nghĩa trên theo cách khác :

Cho trước số $\varepsilon > 0$, ta có thể tìm số $\delta > 0$ sao cho nếu $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $x \neq x_0$ thì $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.



⊙ **Chú ý**

i) $x \to x_0$ nhưng $x \neq x_0$.

ii) Khi $f(x)$ xác định tại x_0 có thể $f(x_0) \neq L$.

• **Ví dụ 17** Chứng minh $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Giải

Vì $x \to 1$ nhưng $x \neq 1$, nên

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |(x + 1) - 2| = |x - 1|.$$

Với mọi $\varepsilon > 0$, chọn $\delta = \varepsilon$ thì với $0 < |x - 1| < \delta$ ta có $\left| \frac{x^2-1}{x-1} - 2 \right| < \varepsilon$.

Điều này chứng tỏ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

□ **Định nghĩa 13** (*Ngôn ngữ dãy*)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \{x_n\} \subset X \setminus \{x_0\},\ x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to L.$$

• **Ví dụ 18** Xét hàm $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ trong lân cận điểm $x = 0$. Hàm này không có giới hạn khi x dần về 0.

Giải

Thật vậy, xét các dãy $\{x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}\}_n$ và $\{x_n' = \frac{1}{2n\pi}\}_n$. Ta có $x_n \to 0$ và $x_n' \to 0$, nhưng

$$f(x_n) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0 \to 0, \quad f(x_n') = \cos 2n\pi = 1 \to 1.$$

3.3 Giới hạn một phía

Trong định nghĩa 12, khi nói x dần về x_0, có thể $x > x_0$ hoặc $x < x_0$.

Khi x dần về x_0 bên trái ($x \to x_0$ và $x < x_0$) thì giới hạn của $f(x)$ được gọi là giới hạn trái của $f(x)$ tại x_0, kí hiệu là $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ hay $f(x_0 - 0)$.

Tương tự, khi x dần về x_0 bên phải ($x \to x_0$ và $x > x_0$) thì ta có giới hạn phải của $f(x)$ tại x_0, kí hiệu là $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ hay $f(x_0 + 0)$.

△ Định lí 5

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x), \exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

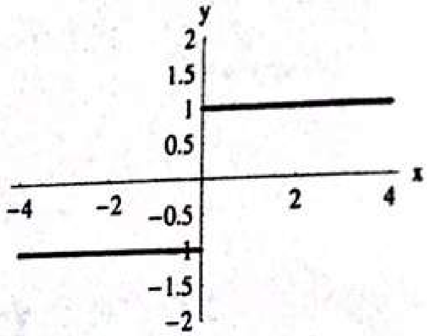
• **Ví dụ 19** Xét hàm dấu

$$f(x) = \text{sign}x = \begin{cases} -1 & \text{nếu} \quad x < 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0 \\ 1 & \text{nếu} \quad x > 0. \end{cases}$$

Đồ thị của hàm cho bởi hình bên. Ta có

$$f(0-0) = -1 \neq 1 = f(0+0).$$

Vậy $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$.



3.4 Giới hạn ở vô tận và giới hạn vô tận

Khi x dần ra vô tận hoặc L bằng ∞ ta có giới hạn ở vô tận hoặc giới hạn vô tận. Các khái niệm này được định nghĩa dưới đây.

□ Định nghĩa 14

* $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x \in X, x > M (x < -M) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \; (-\infty) \;\Leftrightarrow\; \forall A > 0, \exists \delta(A) > 0 : \forall x \in X,$ $0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > A \, (f(x) < -A)$.

• **Ví dụ 20**

i) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2 + 1} = 0$.

ii) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

⋄ **Nhận xét** Dãy số là trường hợp đặc biệt của hàm số khi biến số là các số tự nhiên nên ta có thể xem giới hạn của dãy số là trường hợp đặc biệt của giới hạn hàm khi biến số dần ra $+\infty$.

3.5 Tính chất của giới hạn

i) Giới hạn của hàm $f(x)$ khi $x \to x_0$ (hay $x \to \infty$) nếu có là duy nhất.

ii) Nếu $f(x) = C$ (const) thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = C$.

iii) Giả sử hàm $f(x)$ xác định trên tập X. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $A < L < B$ thì tồn tại khoảng J chứa x_0 sao cho $A < f(x) < B$, $\forall x \in J \cap X, x \neq x_0$.

Đặc biệt, nếu $L > 0$ $(L < 0)$ thì $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ $\forall x \in J \cap X$, $x \neq x_0$.

iv) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $A < f(x) < B$ $\forall x \in X$ thì $A \leq L \leq B$.

Đặc biệt, nếu $f(x) > 0$ (hay $f(x) < 0$) $\forall x \in X$ thì $L \geq 0$ (hay $L \leq 0$).

v) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |L|$.

3.6 Các phép toán về giới hạn

△ **Định lí 6** *Giả sử các hàm $f(x), g(x)$ cùng xác định trên tập X và tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = F$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = G$. Khi đó*

i) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = F \pm G$.

ii) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x).g(x)] = F.G$.

iii) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{F}{G}$ $(G \neq 0)$.

△ **Hệ quả 1**

i) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ tồn tại thì $\lim\limits_{x\to x_0} Cf(x) = C \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (C là hằng số).

ii) $\lim\limits_{x\to x_0} [f_1(x).f_2(x)\dots f_n(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x). \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)\dots \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$.

Đặc biệt : $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^n = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n$.

• **Ví dụ 21**

i) $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = \lim\limits_{x\to x_0} x \dots \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0^n$.

ii) Xét đa thức $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$. Ta có

$$\lim_{x\to x_0} P_n(x) = a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_0 + a_n = P_n(x_0).$$

3.7 Giới hạn của hàm hợp

△ **Định lí 7** *Xét hàm hợp $f[u(x)]$. Nếu*

i) $\lim_{x\to x_0} u(x) = u_0$.

ii) $f(u)$ xác định tại u_0 và lân cận u_0 và $\lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$

thì

$$\lim_{x\to x_0} f[u(x)] = f(u_0) \quad \left(= f\left(\lim_{x\to x_0} u(x)\right)\right).$$

• **Ví dụ 22** Tìm $L = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1)^{100}$.

Giải

Đặt $u(x) = x^2+x+1$ và $f(u) = u^{100}$. Ta có

$$\lim_{x\to 1} u(x) = 3, \quad \lim_{u\to 3} f(u) = 3^{100}.$$

Vậy $L = f(3) = 3^{100}$.

3.8 Giới hạn của hàm sơ cấp

△ **Định lí 8** *Nếu hàm sơ cấp $f(x)$ xác định ở x_0 và lân cận x_0 thì*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

• **Ví dụ 23**

i) $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$.

ii) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}e^x - \ln x}{\sin^2(2x+1) + \tan x} = \dfrac{\sqrt{2}e^2 - \ln 2}{\sin^2 5 + \tan 2}$.

• **Ví dụ 24** Một công ti dự tính rằng khi dùng x triệu USD để quảng cáo sản phẩm thì lợi nhuận R (theo triệu USD) được cho bởi hàm

$$R(x) = 500 - \frac{1\,000}{x+4}.$$

a) Tìm $\lim_{x\to 0} R(x)$ và $\lim_{x\to +\infty} R(x)$;

b) Công ti đang chi 30 triệu USD cho quảng cáo. Hỏi công ti có nên tăng số tiền đó lên đến 40 triệu USD hay không ?

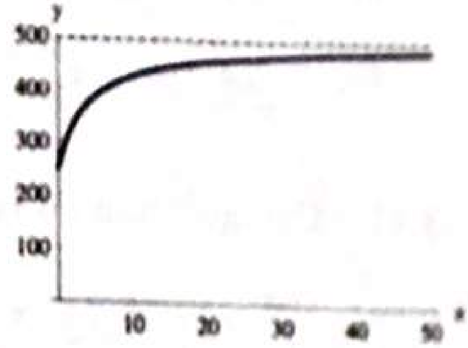
Giải

a) Ta có

$$\lim_{x\to 0} R(x) = 500 - \frac{1000}{0+4} = 250$$

và

$$\lim_{x\to +\infty} R(x) = 500 - 0 = 500.$$



b) Ta thấy $R(x)$ tăng và $R(x) < 500$, $\forall x > 0$. Khi $x > 30$ thì $R(x)$ tăng chậm.

Vì $R(30) \simeq 470,59$ và $R(40) \simeq 477,27$ nên $R(40) - R(30) \simeq 6,69$ triệu USD. Hiệu số này nhỏ hơn 10 triệu USD chi cho quảng cáo nên việc chi thêm tiền cho quảng cáo là không có lợi.

3.9 Dạng vô định $\frac{0}{0}$

Nếu $\lim_{x\to x_0} u(x) = \lim_{x\to x_0} v(x) = 0$ thì ta nói $\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$.

** Phương pháp khử*

Để tìm $\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$ ta biến đổi sao cho $u(x)$ và $v(x)$ có chứa nhân tử $x - x_0$.

• **Ví dụ 25** Tìm $L = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

Ta có

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}.$$

• **Ví dụ 26** Tìm $L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$.

Ta có

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

3.10 Tiêu chuẩn tồn tại giới hạn

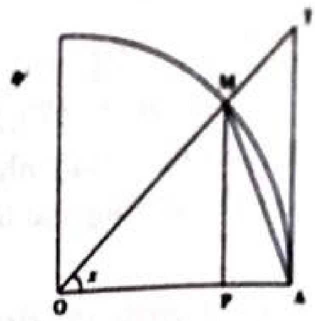
△ **Định lí 9** *Giả sử*

i) Các hàm $f(x), g(x), h(x)$ xác định ở lân cận x_0 (không cần xác định tại x_0) và $g(x) \le f(x) \le h(x)$, $\forall x$, *ii)* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L.$

Khi đó $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L.$

3.11 Các giới hạn cơ bản

i) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1}$



Vì $x \to 0$ nên ta hạn chế xét với $x : 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$.

* Khi $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ta thấy diện tích $\Delta AMO <$ diện tích hình quạt $AMO <$ diện tích ΔAOT,

hay

$\frac{1}{2}AO.MP < \frac{1}{2}OA.AM < \frac{1}{2}OA.AT.$

Từ đó $\sin x < x < \tan x.$

Suy ra $1 < \dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{1}{\cos x}.$

* Khi $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ thì $0 < -x < \frac{\pi}{2}$. Theo trên ta có

$$1 < \frac{\sin(-x)}{-x} < \frac{1}{\cos(-x)}$$

hay $1 < \dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{1}{\cos x}.$

Tóm lại với x thoả $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$, ta có $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1.$

Vì $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ nên theo tiêu chuẩn tồn tại giới hạn ta có

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

- **Ví dụ 27**

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}} = 1.$$

- **Ví dụ 28**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

• **Ví dụ 29**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

• **Ví dụ 30** Tìm $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

Giải

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{1-\cos x}{x^2}.\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

ii) $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e}$

Trước hết ta xét $x\to+\infty$. Với mọi $x>0$, tồn tại số tự nhiên n sao cho $n\le x<n+1$. Từ đó $\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{n}$. Do đó ta có

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

* Khi $x\to+\infty$ thì $n\to+\infty$ và $n+1\to+\infty$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=e.1=e.$$

Theo định lí 9, ta suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e.$

* Khi $x\to-\infty$. Đặt $y=-(x+1)$. Ta cũng chứng minh được $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e.$

Tóm lại ta có $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e.$

iii) $\boxed{\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e}$

Đặt $\alpha = \frac{1}{x}$. Khi $\alpha \to 0$ thì $x \to \infty$. Khi đó

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

◇ **Dạng vô định 1^∞**

Xét $L = \lim_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)}, \quad u(x) > 0.$

* Nếu $\lim_{x\to x_0} u(x) = a\ (a > 0)$ và $\lim_{x\to x_0} v(x) = b$ thì ta có $L = a^b$.

* Nếu $\lim_{x\to x_0} u(x) = 1$ và $\lim_{x\to x_0} v(x) = \infty$ thì ta nói $\lim_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)}$ có dạng vô định 1^∞.

*** Phương pháp khử dạng 1^∞**

Ta phân tích

$$L = \lim_{x\to x_0}\left\{[1+(u(x)-1)]^{\frac{1}{u(x)-1}}\right\}^{[u(x)-1]v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)-1]v(x)}$$

• **Ví dụ 31** Tìm $L = \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{2}{x}}$.

Giải

Ta có $\quad L = \lim_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{2}{x}\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} 2\frac{\sin x}{x}} = e^2.$

• **Ví dụ 32** Tìm $L = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.

Giải

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}} = e^2$$

iv) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$

Chứng minh. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$

• **Ví dụ 33** Tìm $L = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$.

Giải

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x}.\frac{2x}{3x}.\frac{3x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}.$$

v) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a}$

Chứng minh. Đặt $t = a^x - 1$ thì $x = \frac{\ln(1+t)}{\ln a}$. Khi $x \to 0$ thì $t \to 0$.

Khi đó $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln a}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \ln a.$ ♦

* Đặc biệt : $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$.

• **Ví dụ 34** Tìm $L = \lim_{x\to 0} \frac{5^x - 4^x}{x^2 + x}$.

Giải

$$L = \lim_{x\to 0} \left(\frac{5^x - 1}{x} - \frac{4^x - 1}{x} \right) \frac{1}{x+1} = \ln 5 - \ln 4 = \ln \frac{5}{4}.$$

vi) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu}$

Chứng minh. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\mu \ln(1+x)} - 1}{\mu \ln(1+x)}.\frac{\ln(1+x)}{x}.\mu = \mu.$

* Đặc biệt : $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}}$.

• **Ví dụ 35** Tìm $L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x\sin x} - 1}{x^2}$.

Giải

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x\sin x} - 1}{x \sin x}.\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}.$$

§4. Vô cùng bé, vô cùng lớn

4.1 Vô cùng bé

a) Khái niệm vô cùng bé

□ **Định nghĩa 15** Hàm $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng bé khi $x \to x_0$ nếu $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

• **Ví dụ 36**

i) $\alpha(x) = \sin(x-1)$ là vô cùng bé khi $x \to 1$.

ii) $\alpha(x) = \frac{1}{x}$ là vô cùng bé khi $x \to \infty$.

b) Liên hệ giữa vô cùng bé và giới hạn

△ **Định lí 10**

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow f(x) = L + \alpha(x)$, *với* $\alpha(x)$ *là vô cùng bé khi* $x \to x_0$

c) Tính chất

i) Tổng và tích của hai vô cùng bé là một vô cùng bé.

ii) Tích của vô cùng bé và một đại lượng bị chặn là một vô cùng bé.

Ví dụ $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$ vì hàm trong dấu giới hạn là tích của vô cùng bé x (khi $x \to 0$) và đại lượng bị chặn $\sin\frac{1}{x}$.

d) Phân loại các vô cùng bé

Ta xét các vô cùng bé $\alpha(x), \beta(x)$ trong một quá trình.

i) Nếu $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ thì $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng bé cấp cao hơn $\beta(x)$. Kí hiệu $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

ii) Nếu $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = L$ $(L \neq 0)$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ được gọi là hai vô cùng bé cùng cấp.

Đặc biệt, khi $L = 1$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ được gọi là hai vô cùng bé tương đương. Kí hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

iii) Nếu $\lim \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = A$ $(A \neq 0)$ thì $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng bé cấp k so với $\beta(x)$ và $A[\beta(x)]^k$ được gọi là phần chính của vô cùng bé $\alpha(x)$.

• **Ví dụ 37**

i) Vì $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ nên $\sin x \sim x$ khi $x \to 0$.

ii) Vì $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ nên $1 - \cos x$ là vô cùng bé cấp hai so với x khi $x \to 0$ và phần chính của vô cùng bé $1 - \cos x$ so với x là $\frac{1}{2}x^2$.

e) Các vô cùng bé tương đương

Xét quá trình $\alpha \to 0$. Ta có các vô cùng bé tương đương sau :

i) $\sin\alpha \sim \alpha$

ii) $\tan\alpha \sim \alpha$

iii) $1 - \cos\alpha \sim \frac{1}{2}\alpha^2$

iv) $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$

v) $e^\alpha - 1 \sim \alpha$

vi) $(1+\mu)^\alpha - 1 \sim \mu\alpha$.

f) Dùng các vô cùng bé để khử dạng vô định

△ **Định lí 11** (Vô cùng bé tương đương) *Giả sử $\alpha(x), \beta(x), \overline{\alpha}(x), \overline{\beta}(x)$ là các vô cùng bé trong một quá trình. Nếu $\alpha \sim \overline{\alpha}$, $\beta \sim \overline{\beta}$ thì*

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}.$$

• **Ví dụ 38**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sin\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1.$$

△ **Định lí 12** (Ngắt bỏ các VCB cấp cao) *Giả sử $\alpha(x), \beta(x)$ là hai vô cùng bé trong một quá trình và là tổng của nhiều vô cùng bé. Khi đó $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ bằng giới hạn của tỉ số hai vô cùng bé cấp thấp nhất ở tử và mẫu.*

• **Ví dụ 39**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + 3x^2 + 2\tan^5 x}{3x + x^3 + 6x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}.$$

4.2 Vô cùng lớn

a) Khái niệm vô cùng lớn

□ **Định nghĩa 16** Hàm $A(x)$ xác định trong (a,b) (hay $(-\infty,+\infty)$) được gọi là vô cùng lớn khi $x \to x_0 \in [a,b]$ (hay $x \to \infty$) nếu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} |A(x)| = +\infty$.

• **Ví dụ 40**

i) $A(x) = \frac{1}{x}$ là vô cùng lớn khi $x \to 0$.

ii) $A(x) = x$ là vô cùng lớn khi $x \to \infty$.

◇ **Nhận xét**

i) Nếu $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} A(x) = \pm\infty$ thì $A(x)$ là vô cùng lớn khi $x \to x_0$ $(x \to$

ii) Nếu $f(x)$ là vô cùng lớn thì $f(x)$ là đại lượng không bị chặn. N
chung điều ngược lại là không đúng.

b) Tính chất và phép toán

i) Tích của hai vô cùng lớn là một vô cùng lớn.

ii) Tổng của một vô cùng lớn và một đại lượng bị chặn là một vô cù
lớn. Ví dụ $A(x) = x + \sin x$ là một vô cùng lớn khi $x \to \infty$.

iii) Nghịch đảo của một vô cùng bé (vô cùng lớn) là một vô cùng lớn (v
cùng bé).

c) Phân loại các vô cùng lớn

□ **Định nghĩa 17** Giả sử $A(x), B(x)$ là các vô cùng lớn trong một qu
trình.

Nếu $\frac{A(x)}{B(x)}$ là một vô cùng lớn thì $A(x)$ gọi là vô cùng lớn cấp cao hơ
$B(x)$ (hay $B(x)$ là vô cùng lớn cấp thấp hơn $A(x)$).

Nếu $\lim \frac{A(x)}{B(x)} = C \neq 0$ thì $A(x)$ và $B(x)$ gọi là hai vô cùng lớn cùng cấp.

d) Ngắt bỏ các vô cùng lớn cấp thấp

△ **Định lí 13** *Nếu $A(x), B(x)$ là hai vô cùng lớn trong một quá trình và l
tổng của nhiều vô cùng lớn thì $\lim \frac{A(x)}{B(x)}$ bằng giới hạn của tỉ số hai vô cùn
lớn cấp cao nhất ở tử và mẫu.*

• **Ví dụ 41**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 8x + 10}{x^2 + x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

⋆ **Áp dụng**

Cho hai đa thức $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ và
$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$.

Ta có

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\begin{cases}0 & \text{nếu } n<m\\ \frac{a_n}{b_m} & \text{nếu } n=m\\ \infty & \text{nếu } n>m.\end{cases}$$

• **Các dạng vô định** $\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$

□ **Định nghĩa 18**

$\infty-\infty$: hiệu của hai vô cùng lớn cùng dấu

$\frac{\infty}{\infty}$: tỉ số của hai vô cùng lớn

$0.\infty$: tích của vô cùng bé và vô cùng lớn.

▷ **Phương pháp khử**

Đối với các dạng $\infty-\infty$ và $0.\infty$, ta dùng các phép biến đổi thích hợp để đưa về các dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

• **Ví dụ 42** Tìm $L=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

Giải

$$L=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{1-x^2}=-\lim_{x\to1}\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{2}.$$

• **Ví dụ 43** Tìm $L=\lim\limits_{x\to1}(x-1)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

Giải

$$L=\lim_{x\to1}(x-1)\cot\frac{\pi}{2}(1-x)=-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}.\cos\frac{\pi}{2}(1-x)=-\frac{2}{\pi}.$$

• **Ví dụ 44** Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

Giải

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}\quad(\text{dạng }\tfrac{\infty}{\infty})\quad=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

§5. Liên tục

5.1 Hàm liên tục

□ **Định nghĩa 19** Cho hàm $f(x)$ xác định trong khoảng (a,b) và $x_0\in(a,b)$.

f được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

f liên tục trong (a, b) nếu f liên tục tại mọi $x \in (a, b)$.

• **Ví dụ 45** Các hàm $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \dfrac{1}{x}, e^{1/x^2}$ không liên tục tại $x = 0$ vì không tồn tại $f(0)$.

• **Ví dụ 46** Xét tính liên tục của hàm

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases}$$

tại $x = 0$.

Giải

$f(0) = 0$.

Vì $0 \leq |x^2 \sin \frac{1}{x}| \leq |x|^2 \to 0$ nên $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Do $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ nên f liên tục tại $x = 0$.

◇ **Nhận xét** Đặt $\triangle x = x - x_0$, gọi là số gia của x tại x_0.

$\triangle f = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$ gọi là số gia của hàm ứng với số gia của đối số $\triangle x$. Khi đó, *$f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi* $\lim_{\triangle x \to 0} \triangle f = 0$.

5.2 Liên tục một phía

□ **Định nghĩa 20** Cho hàm $f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$ và $x_0 \in [a, b]$.

Hàm f gọi là *liên tục bên trái (phải)* tại x_0 nếu

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \qquad (\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)).$$

Hàm liên tục bên trái hay phải tại x_0 được gọi là *liên tục một phía* tại điểm này.

Hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu f liên tục trong khoảng (a, b), liên tục phải tại a và liên tục trái tại b.

• **Ý nghĩa hình học**

Nếu hàm $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì đồ thị của nó là một đường liền nối điểm $(a, f(a))$ và điểm $(b, f(b))$.

• **Ví dụ 47** Xét tính liên tục một phía của hàm

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu} \quad x \geq 1 \\ 3x + 1 & \text{nếu} \quad x < 1 \end{cases}$$

tại $x = 1$.

Giải

Ta có

$f(1) = 1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(3x+1) = 4 \neq f(1)$. Do đó f không liên tục trái tại $x = 1$.

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1 = f(1)$. Suy ra f liên tục phải tại $x = 1$.

△ **Định lí 14** *Hàm f liên tục tại x_0 khi và chỉ khi f liên tục trái và liên tục phải tại x_0.*

5.3 Điểm gián đoạn. Phân loại điểm gián đoạn

□ **Định nghĩa 21** Cho hàm $f(x)$ xác định trong (a, b) và $x_0 \in (a, b)$. Nếu $f(x)$ không liên tục tại x_0 thì ta nói $f(x)$ gián đoạn tại x_0.

• **Phân loại điểm gián đoạn**

Ta phân loại điểm gián đoạn x_0 của hàm $f(x)$ như sau :

* *Gián đoạn loại 1* : tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ hữu hạn.

Đặc biệt, khi $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L \neq f(x_0)$ thì ta gọi x_0 là điểm gián đoạn bỏ được. Trong trường hợp này nếu thay L bởi $f(x_0)$ thì hàm liên tục tại x_0.

* *Gián đoạn loại 2* : ít nhất một trong các giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ không tồn tại hoặc tồn tại nhưng bằng $\pm\infty$.

• **Ví dụ 48** Xét hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{nếu} \quad x > 0 \\ 1 & \text{nếu} \quad x \le 0. \end{cases}$$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1 = f(0)$.

Do đó $f(x)$ gián đoạn loại 2 tại $x = 0$, liên tục bên trái tại $x = 0$.

5.4 Các phép toán trên các hàm liên tục

△ **Định lí 15** *Nếu các hàm $f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại x_0 thì $f(x) \pm g(x)$, $f(x).g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ cũng liên tục tại x_0.*

△ **Định lí 16** *Nếu hàm $f(x)$ liên tục tại x_0, hàm $g(y)$ xác định trong khoảng chứa $y_0 = f(x_0)$ và liên tục tại y_0 thì hàm hợp $g \circ f(x)$ liên tục tại x_0.*

△ **Định lí 17** *Mọi hàm số sơ cấp liên tục tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó.*

5.5 Tính chất của hàm liên tục trên một đoạn

△ **Định lí 18** *Nếu $f(x)$ liên tục tại x_0 và $f(x_0) > 0$ (hay $f(x_0) < 0$) thì tồn tại một khoảng J chứa x_0 sao cho $f(x) > 0$ (hay $f(x) < 0$) $\forall x \in J$.*

△ **Định lí 19** *Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì nó bị chặn trên $[a, b]$, tức là tồn tại hai số m và M sao cho*

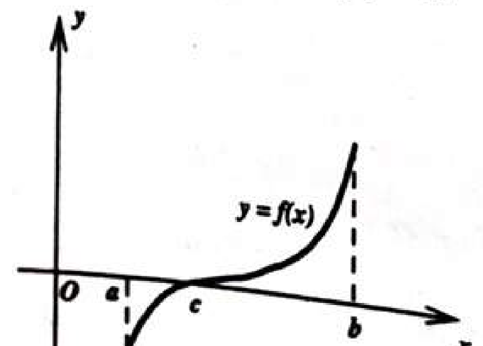
$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b].$$

△ **Định lí 20** (Weierstrass) *Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì nó đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên $[a, b]$, tức là tồn tại $x_1, x_2 \in [a, b]$ sao cho $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ với mọi $x \in [a, b]$.*

△ **Định lí 21** (Bolzano-Cauchy 1) *Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$ thì với mọi $\gamma \in (A, B)$ đều tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = \gamma$.*

△ **Hệ quả 2** *Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì $f(x)$ nhận mọi giá trị trung gian giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên $[a, b]$.*

△ **Định lí 22** (Bolzano-Cauchy 2) *Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.*



• **Ví dụ 49** Chứng minh phương trình $x^5 - 3x^2 + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm dương nhỏ hơn 1.

Giải

Xét hàm $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$ trên $[0, 1]$. Ta có

$f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$.

$f(0) = 1, f(1) = -1$ nên $f(0)f(1) < 0$.

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(0, 1)$.

• **Thuật toán tìm nghiệm gần đúng của phương trình f(x) = 0** [1]

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và đơn điệu trên $[a, b]$. Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì theo tính chất của hàm liên tục trên một đoạn, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = c \in [a, b]$. Trong trường hợp này, ta có thể xác định nghiệm chính xác hay nghiệm gần đúng bằng phương pháp chia liên tiếp theo các bước như sau :

Chia đôi $[a, b]$ và đặt $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$. Tính $f(x_1)$ (*) .

* Nếu $f(x_1) = 0$ thì x_1 là nghiệm của phương trình.

* Nếu $f(x_1) \neq 0$ thì ta xét các trường hợp :

Nếu $f(x_1)f(a) < 0$ thì nghiệm thuộc $[a, x_1]$. Chia đôi $[a, x_1]$ và đặt $x_2 = \dfrac{a + x_1}{2}$ rồi trở lại bước (*).

Nếu $f(x_1)f(b) < 0$ thì nghiệm thuộc $[x_1, b]$. Chia đôi $[x_1, b]$ và đặt $x_2 = \dfrac{x_1 + b}{2}$ rồi trở lại bước (*).

Thực hiện quá trình sau n bước ta sẽ nhận được nghiệm chính xác $x = c$ hoặc nghiệm gần đúng x_n của phương trình với sai số tuyệt đối

$$\delta = |c - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

Khi n càng lớn thì sai số càng nhỏ.

• **Ví dụ 50** Chứng minh phương trình $x^3 - x - 1 = 0$ có một nghiệm trong $[1, 2]$. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình với sai số nhỏ hơn 0,01.

Giải

[1] Phần đọc thêm

Xét $f(x) = x^3 - x - 1$. Ta thấy $f(x)$ liên tục trên $[1, 2]$ và $f(1) = -1, f(2) = 5$ nên $f(1)f(2) < 0$. Do đó phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên $[1, 2]$.

Mặt khác, với mọi $x_1, x_2 \in [1, 2]$, $x_1 < x_2$ ta có

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1) < 0$$

vì $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1 > 0$ với $x_1, x_2 \in [1, 2]$.

Vậy hàm số $f(x)$ tăng nghiêm ngặt trên $[1, 2]$. Do đó phương trình có nghiệm duy nhất trên $[1, 2]$.

Ta tìm nghiệm gần đúng của phương trình bằng cách lập bảng sau :

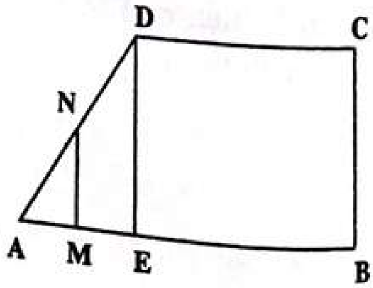
Lần phân chia	x	$f(x)$	Nghiệm nằm trong khoảng	Điểm giữa
1	1,5	0,8750	[1 ; 1,5]	1,25
2	1,25	-0,2969	[1,25 ; 1,5]	1,375
3	1,375	0,2246	[1,25 ; 1,375]	1,3125
4	1,3125	-0,0515	[1,3125 ; 1,375]	1,3438
5	1,3438	0,0826	[1,3125 ; 1,3438]	1,3282
6	1,3282	0,0147	[1,3125 ; 1,3282]	1,3204
7	1,3204	-0,0186	[1,3204 ; 1,3282]	1,3243

Sai số giữa nghiệm gần đúng và nghiệm đúng là $\delta \le \frac{1}{2^7} \approx 0,008 < 0,01$.

Vậy $x_7 = 1,3204$ là nghiệm gần đúng của phương trình với sai số tuyệt đối nhỏ hơn 0,01.

Bài tập

1. Cho hình thang vuông ABCD (hình bên) với $AB = a, BC = b, AE = c$. Một điểm M di chuyển trên AB. Đặt $AM = x$. Hãy biểu diễn $MN = y$ và diện tích z của hình AMN theo x.



2. Tìm miền xác định của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$;

b) $y = (x - 2)\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$;

c) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$;

d) $y = \arcsin(1 - x) + \lg(\lg x)$.

3. Tìm miền giá trị của các hàm số sau :

a) $y = \sqrt{2 + x - x^2}$; b) $y = \lg(1 - 2\cos x)$.

4. Xét tính tuần hoàn của các hàm số sau :

a) $f(x) = a\sin\lambda x + b\cos\lambda x$, ($a, b$ là hằng số, $\lambda \neq 0$) ;

b) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$;

c) $f(x) = \tan\sqrt{x}$.

5. Tìm $f[f(x)], g[g(x)], f[g(x)], g[f(x)]$ với

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$;

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x \le 0 \\ x & \text{nếu} \quad x > 0, \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x \le 0 \\ -x^2 & \text{nếu} \quad x > 0. \end{cases}$

6. Tìm $f(x)$ nếu $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

7. Tìm giới hạn của các dãy số sau :

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{5n^3 + n + 1}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right]$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n}{n^n}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$.

8. Tìm các giới hạn một phía

a) $\lim\limits_{x\to 1^\pm} 2^{\frac{1}{x-1}}$; b) $\lim\limits_{x\to 1^\pm} \arctan\dfrac{1}{x-1}$.

9. Tìm các giới hạn một bên hoặc giải thích tại sao giới hạn không tồn tại.

a) $L_- = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{x^3 - x}$, $\quad L_+ = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^3 - x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x^2 - 4|}{x - 2}$.

10. Cho $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = A$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = B$. Tìm

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^3 - x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x^3 - x)$;

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^2 - x^4)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x^2 - x^4)$.

11. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x^{2/3} - 4}{x^{1/3} - 2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|3x - 1| - |3x + 1|}{x}$;

e) $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$;

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x})\dots(1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}}$.

12. Cho $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$. Tìm $L = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

13. Cho $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$. Tìm $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ và $L_2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

14. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x - 3)^{20}(3x + 2)^{30}}{(2x + 1)^{50}}$;

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$;

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$;

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + \sin x}{x^2 + \cos x}$.

15. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px}$;

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\pi - 2x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} (1 - x) \tan \dfrac{\pi x}{2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x \cos 2x}{1 - \cos x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos\sqrt{x}}$;

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sin\sqrt{x + 1} - \sin\sqrt{x})$;

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+x)+\sin(a-x)-2\sin a}{x^2}$.

16. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x+e^{2x}\right)^{1/x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\tan\sqrt{2x}\right)^{\frac{1}{3x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

17. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x-1}{x\ln x}$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+a)-\ln a]$;

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$ $(\alpha\neq\beta)$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1+3x}-1}{x}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt[4]{1-2x}}{x^2+x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

18. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x}-\cot x\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)}-x\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

19. Dùng các vô cùng bé tương đương tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\tan 3x}$;

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\sin x)}{x-\frac{\pi}{2}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(e^x+x)-\sin 3x}{\arctan 4x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx-n}{\sin x^2}$.

20. Khảo sát tính liên tục của các hàm sau :

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{nếu } x \geq 0 \\ \sin x & \text{nếu } x < 0; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2}x & \text{nếu } |x| \leq 1 \\ x - 1 & \text{nếu } |x| > 1. \end{cases}$

21. Xác định các giá trị của a, b để các hàm sau liên tục :

a) $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{nếu } x \geq 0 \\ e^x & \text{nếu } x < 0; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan kx}{x} & \text{nếu } x < 0 \\ 3x + 2k^2 & \text{nếu } x \geq 0; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} a \cos x + 1 & \text{nếu } x \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin x + b & \text{nếu } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

22. Tìm và phân loại các điểm gián đoạn của các hàm sau :

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2^{1/x}}$; b) $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$;

c) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$; d) $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{x-1}}}$.

23. Chứng minh rằng phương trình $x2^x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm dương nhỏ hơn 1.

24. Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 15x + 1 = 0$ có ba nghiệm trên đoạn $[-4, 4]$.

25. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x2^x & \text{nếu } x \neq a \\ 1 & \text{nếu } x = a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Chứng minh rằng có ít nhất một giá trị $a \in (0, 1)$ để $f(x)$ liên tục tại $x = a$.

26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ sao cho $a \leq f(x) \leq b$, $\forall x \in [a, b]$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) - x = 0$ có nghiệm.

27. Cho $f(x)$ là một đa thức bậc lẻ. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm thực.

►Hướng dẫn và đáp số bài tập chương 1

1. $y = \begin{cases} \frac{b}{c} & khi \quad 0 \le x \le c \\ b & khi \quad c < x \le a \end{cases}$, $\quad S = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{b}{c}x^2 & \text{khi} \quad 0 \le x \le c \\ \frac{1}{2}b(x-c) & \text{khi} \quad c < x \le a. \end{cases}$

2. a) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$; b) $[-1, 1)$; c) $k < x < k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; d) $(1, 2]$.

3. a) $[0; \frac{3}{2}]$, b) $(-\infty, \lg 3]$.

4. a) Tuần hoàn chu kì $T = \frac{2\pi}{\lambda}$; c) Không tuần hoàn.

5. a) $f[f(x)] = x^4$, $g[g(x)] = 2^{2^x}$, $f[g(x)] = 2^{2x}$, $g[f(x)] = 2^{x^2}$.
   b) $f[f(x)] = f(x)$, $g[g(x)] = 0$, $g[f(x)] = g(x)$, $f[g(x)] = 0$.

6. $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{x^2+1}}{x}$.

7. a) $\dfrac{1}{15}$; b) 1 ; c) 1. HD: $\dfrac{n^n}{n^n} \le x_n < \dfrac{n^1 + n^2 + \ldots + n^n}{n^n} = \dfrac{n}{n-1}$;
   d) 1. HD : $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le x_n \le \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

8. a) $\lim\limits_{x\to 1^-} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0$, $\lim\limits_{x \to 1^+} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$.

9. a) $L_- = 0$, L_+ không tồn tại.
   b) Giới hạn không tồn tại vì $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x^2-4|}{x-2} = -4$, $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|x^2-4|}{x-2} = 4$.

10. a) B, A, b) B, B.

11. a) 2 ; b) 0 ; c) 4 ; d) -6 ; e) $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$; f) $\dfrac{1}{n!}$.

12. Từ giả thiết ta có $\lim\limits_{x\to 2}[f(x) - 5] = 0$. Do đó $L = 5$.

13. $L_1 = L_2 = 0$.

14. a) $(\frac{3}{2})^{30}$; b) 2 ; c) 1 ; d) $\frac{1}{2}$; e) 1.

15. a) $\cos a$; b) $\frac{1}{p}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{2}{\pi}$; e) 1 ; f) 5 ; g) 0 ;

h) 0 ; i) $-\sin a$.

16. a) e ; b) e^3 ; c) 1 ; d) e ; e) $e^{2/3}$; f) $-\frac{1}{2}$.

17. a) 1 ; b) a ; c) $\frac{1}{a}$; d) 1 ; e) 2 ; f) $\frac{1}{2}$; g) $\frac{1}{12}$.

18. a) $\dfrac{1}{4}$; b) 0 ; c) $\dfrac{1}{2}$; d) $\dfrac{a+b+c}{3}$;

e) Xét $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x)+(x-\sqrt{x^2-2x})\right]=2.$

19. a) $\dfrac{1}{3}$; b) 0 ; c) 1 ; d) $-\dfrac{1}{4}$; e) $-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}$.

20. a) $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$; b) $f(x)$ không liên tục tại $x=0$ và là điểm gián đoạn loại 1 ; c) $f(x)$ không liên tục $x=-1$ và $x=$ điểm gián đoạn loại 1.

21. a) $a=1$; b) $k=0, k=\frac{1}{2}$; c) $a\in\mathbb{R}$, $b=0$.

22. a) $x=0$ là điểm gián đoạn loại 1 ;

b) $x=-1$ là điểm gián đoạn loại 2 ;

c) $x=0$ là điểm gián đoạn bỏ được, $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ là điểm gián đoạn loại 2.

23. Đặt $f(x)$ là vế trái của phương trình và chứng tỏ $f(0)f(1)<0$.

26. Đặt $g(x)=f(x)-x$. Ta có g liên tục trên $[a,b]$ và $g(a)g(b)<0$. $\exists x_0\in(a,b)$ sao cho $g(x_0)=0$.

27. Giả sử $f(x)=a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ với $a_0>0$. Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ nên tồn tại $a,b\in\mathbb{R}$ với $a<b$, $f(a)<0$, $f(b)>$

Chương 2

PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

§1. Đạo hàm

1.1 Đạo hàm tại một điểm

□ **Định nghĩa 1** Giả sử hàm $y = f(x)$ xác định trong (a, b) và $x_0 \in (a, b)$. Cho x_0 số gia Δx sao cho $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Lập tỉ số

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Nếu tồn tại $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ (hữu hạn) thì ta nói hàm $f(x)$ **có đạo hàm tại** x_0 và giới hạn được gọi là đạo hàm của $f(x)$ tại x_0. Kí hiệu $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$. Ta có

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

⊙ **Chú ý** Đặt $x = x_0 + \Delta x$ thì $\Delta x = x - x_0$ và $\Delta x \to 0$ khi và chỉ khi $x \to x_0$. Do đó

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

• **Ví dụ 1** Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = e^x$ tại $x = x_0$.

Giải

Xét $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = e^{x_0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$

Ta có $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = e^{x_0} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0}$.

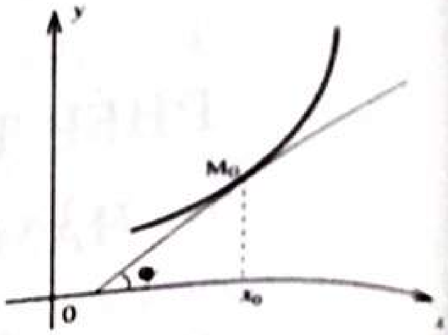
Vậy $f'(x_0) = e^{x_0}$.

- **Ý nghĩa của đạo hàm**

i) *Ý nghĩa hình học*

$f'(x_0) = \tan\alpha$ là hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ x_0 và tiếp tuyến có phương trình

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$



ii) *Ý nghĩa cơ học*

Giả sử một chất điểm chuyển động trên đường thẳng có hoành độ theo thời gian t là $s(t)$. Khi đó $v(t_0) = s'(t_0)$ là vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t_0.

iii) *Ý nghĩa chung*

$f'(x_0)$ biểu thị tốc độ biến thiên của hàm f tại x_0.

1.2 Đạo hàm một phía

□ **Định nghĩa 2** Các giới hạn hữu hạn

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

theo thứ tự được gọi là đạo hàm bên trái, đạo hàm bên phải của hàm $f(x)$ tại x_0.

Δ **Định lí 1** *Hàm $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi nó có đạo hàm trái và đạo hàm phải tại x_0 và các đạo hàm đó bằng nhau.*

- **Ví dụ 2** Xét hàm $f(x) = |x|$ tại $x = 0$.

Ta có $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad \Delta x > 0 \\ -1 & \text{nếu} \quad \Delta x < 0. \end{cases}$

Do đó

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -1, \quad f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 1, \quad f'_-(0) \neq f'_+(0).$$

Vậy hàm $f(x) = |x|$ có đạo hàm trái và phải tại $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại $x = 0$.

• **Ý nghĩa hình học**

$f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ tương ứng là hệ số góc của tiếp tuyến trái, phải của đường cong $y = f(x)$ tại điểm $(x_0, f(x_0))$.

1.3 Đạo hàm trong khoảng, đoạn

Hàm $f(x)$ có đạo hàm trong khoảng (a,b) nếu $f(x)$ có đạo hàm tại mọi $x \in (a,b)$.

Hàm $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[a,b]$ nếu $f(x)$ có đạo hàm trong (a,b), có đạo hàm phải tại a và có đạo hàm trái tại b.

Gọi $X = \{x : f(x) \text{ có đạo hàm tại } x\}$. Hàm số $h(x)$ xác định trên X cho bởi

$$x \mapsto h(x) = f'(x)$$

được gọi là đạo hàm của f và được kí hiệu bởi các dạng y', f', $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$.

1.4 Đạo hàm vô hạn

□ **Định nghĩa 3** Nếu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \infty$ thì ta nói hàm $f(x)$ có đạo hàm vô hạn tại x_0.

• **Ý nghĩa hình học**

Nếu hàm $f(x)$ có đạo hàm vô hạn tại x_0 thì đường cong $y = f(x)$ có tiếp tuyến thẳng đứng tại $(x_0, f(x_0))$.

• **Ví dụ 3** Xét hàm $f(x) = x^{1/3}$ tại $x = 0$. Ta có

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(0 + \Delta x)^{1/3} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} = \infty.$$

Vậy $f(x)$ có đạo hàm vô hạn tại $x = 0$.

1.5 Quan hệ giữa tính có đạo hàm và tính liên tục

△ **Định lí 2** *Nếu hàm $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0.*

Chứng minh

Giả sử $f(x)$ có đạo hàm tại x_0, tức là tồn tại $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$. Ta có

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha, \quad \alpha \to 0 \text{ khi } \Delta x \to 0.$$

Khi đó

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x_0)\Delta x + \alpha.\Delta x) = 0.$$

Vậy $f(x)$ liên tục tại x_0.

⊙ **Chú ý** Chiều ngược lại của định lí 2 không đúng.

Chẳng hạn, xét hàm $f(x) = |x|$ tại $x = 0$.

Do $\lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$ nên $f(x)$ liên tục tại $x = 0$, nhưng không tồn tại $f'(0)$ vì $f'_{-}(0) = -1 \neq f'_{+}(0) = 1$ (xem ví dụ 2).

§2. Các phương pháp tính đạo hàm

2.1 Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

△ **Định lí 3** *Nếu các hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm tại x thì các hàm $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ cũng có đạo hàm tại x và ta có*

i) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.

ii) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

iii) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Chứng minh

Các công thức trên được chứng minh bằng cách dùng định nghĩa của đạo hàm. Ta chứng minh công thức ii). Ta có

$$\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]g(x+\Delta x) + f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x) + f(x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Cho qua giới hạn đẳng thức trên khi $\Delta x \to 0$, ta được công thức cần chứng minh. ∎

△ **Hệ quả 1**

i) $[cf(x)]' = cf'(x)$, (*c* là hằng số)

ii) $\left(\dfrac{c}{f(x)}\right)' = -\dfrac{cf'(x)}{f^2(x)}$.

2.2 Đạo hàm của hàm hợp

△ **Định lí 4** *Nếu hàm $y = y(u)$ có đạo hàm đối với u và hàm $u = u(x)$ có đạo hàm đối với x thì hàm hợp $y = y[u(x)]$ có đạo hàm đối với x và có*

$$\boxed{y'(x) = y'(u).u'(x)}$$

Chứng minh

Ta có

$$\frac{y[u(x+\Delta x)] - y[u(x)]}{\Delta x} = \frac{y[u(x+\Delta x)] - y[u(x)]}{u(x+\Delta x) - u(x)} \cdot \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}. \tag{2.1}$$

Cho qua giới hạn (2.1), ta được

$$y'(x) = y'(u).u'(x).$$ ■

2.3 Đạo hàm của hàm ngược

△ **Định lí 5** *Cho hàm $y = f(x)$ liên tục và tăng (giảm) nghiêm ngặt trong (a, b). Nếu $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 \in (a, b)$ và $f'(x_0) \neq 0$ thì hàm ngược $x = g(y)$ có đạo hàm tại $y_0 = f(x_0)$ và có*

$$\boxed{g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

Chứng minh

Ta thấy $f(x)$ là hàm $1 - 1$ nên hàm ngược của $f(x)$ tồn tại trong khoảng chứa $y_0 = f(x_0)$. Cho y số gia Δy thì $g(y_0 + \Delta y) = x_0 + \Delta x$, trong đó $\Delta x \to 0$ khi và chỉ khi $\Delta y \to 0$. Khi đó

$$\frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} = \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Cho $\Delta y \to 0$ thì ta được $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$. ■

• **Ví dụ 4** Biết $(\sin x)' = \cos x$. Tính đạo hàm của hàm $y = \arcsin x$.

Giải

$y = \arcsin x$ là hàm ngược của hàm $x = \sin y$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có

$$x'(y) = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}.$$

Suy ra $y'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Vậy $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Tương tự, ta có đạo hàm của các hàm lượng giác ngược sau :

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\text{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(\text{arcotg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

2.4 Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

i) $(C)' = 0$ (C là hằng số)

ii) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Đặc biệt : $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

iii) $(a^x)' = a^x \ln a$.

Đặc biệt : $(e^x)' = e^x$.

iv) $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x\ln a}$.

Đặc biệt : $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

v) $(\sin x)' = \cos x$.

vi) $(\cos x)' = -\sin x$.

vii) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

viii) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

ix) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

x) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

xi) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

xii) $(\text{arccot}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

xiii) $(\text{sh}x)' = \text{ch}x$.

xiv) $(\text{ch}x)' = \text{sh}x$.

• **Ví dụ 5** Tính đạo hàm của các hàm sau :

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}$; b) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$; c) $y = e^{\arcsin 3x}$.

Giải

a) Ta có $y = \dfrac{1}{(2x-1)^{1/3}} = (2x-1)^{-\frac{1}{3}}$ nên

$$y' = -\frac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{4}{3}}(2x-1)' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^4}}.$$

b) $y' = \dfrac{(1+\ln^2 x)'}{2\sqrt{1+\ln^2 x}} = \dfrac{2(\ln x).(\ln x)'}{2\sqrt{1+\ln^2 x}} = \dfrac{2(\ln x)\frac{1}{x}}{2\sqrt{1+\ln^2 x}} = \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

c) $y' = e^{\arcsin 3x}.(\arcsin 3x)' = e^{\arcsin 3x}.\dfrac{(3x)'}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \dfrac{3e^{\arcsin 3x}}{\sqrt{1-9x^2}}.$

2.5 Đạo hàm của hàm $y = [u(x)]^{v(x)}$, $(u(x) > 0)$

Đối với hàm dạng này ta không thể áp dụng công thức đạo hàm của hàm luỹ thừa hoặc hàm số mũ để tính.

- **Phương pháp**

Ta có $y = u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}$ nên $y' = e^{v\ln u}\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right)$.

Do đó $y' = u^v\left(v' \ln u + v\dfrac{u'}{u}\right)$.

- **Ví dụ 6** Tính đạo hàm của hàm $y = x^{\sin x}$.

Giải

Ta có $y = e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\sin x.\ln x}$. Do đó

$$y' = e^{\sin x.\ln x}(\sin x.\ln x)' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

2.6 Đạo hàm lôgarit

Trong phần này xét một kĩ thuật lấy đạo hàm, gọi là "*đạo hàm lôgarit*". Kĩ thuật này giúp ta thuận lợi trong việc lấy đạo hàm của các hàm là hợp của các dạng tích, thương và luỹ thừa.

- **Ví dụ 7** Tính đạo hàm của hàm $y = \dfrac{x^2\sqrt[3]{7x-14}}{(1+x^2)^4}$.

Giải

Lấy ln hai vế ta có

$$\ln y = 2\ln x + \frac{1}{3}\ln(7x-14) - 4\ln(1+x^2).$$

Đạo hàm hai vế theo x ta được

$$\frac{1}{y}.y' = \frac{2}{x} + \frac{7/3}{7x-14} - \frac{8x}{1+x^2}.$$

Vậy $y' = \dfrac{x^2\sqrt[3]{7x-14}}{(1+x^2)^4}\left[\dfrac{2}{x} + \dfrac{7/3}{7x-14} - \dfrac{8x}{1+x^2}\right]$.

⊙ **Chú ý** Ta thấy $\ln y$ chỉ xác định khi $y > 0$. Bằng cách dùng tính chất của lôgarit và trị tuyệt đối ta nhận được biểu thức của đạo hàm hoàn toàn giống như khi lấy đạo hàm lôgarit ở trên cho trường hợp tổng quát.

2.7 Đạo hàm của hàm ẩn

□ **Định nghĩa 4** Hàm $y = f(x)$ được gọi là hàm ẩn xác định bởi phươ trình $F(x, y) = 0$ nếu $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x$.

• **Ví dụ 8** Phương trình $x^2 + y^2 = 1$ xác định hai hàm ẩn $y = -\sqrt{1-}$ và $y = \sqrt{1-x^2}$.

• **Đạo hàm của hàm ẩn**

Giả sử $y = f(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình $F(x, y) = 0$. Kh đó ta có

$$F(x, f(x)) = 0, \quad \forall x. \qquad (2.2$$

Xem vế trái của (2.2) như là hàm hợp, ta lấy đạo hàm hai vế theo x Khi đó sẽ xuất hiện đạo hàm $y'(x)$ trong phương trình mới. Giải ra đối vớ y' ta tìm được biểu thức của đạo hàm.

• **Ví dụ 9** Tính đạo hàm của hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trìn $x^2 + y^2 = 1$.

Giải

Đạo hàm hai vế phương trình theo x, ta được

$$2x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

Vì phương trình $x^2 + y^2 = 1$ xác định hai hàm ẩn $y_1 = -\sqrt{1-x^2}$ v $y_2 = \sqrt{1-x^2}$ nên ta được đạo hàm của hai hàm ẩn :

$$y_1'(x) = -\frac{x}{y_1(x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y_2'(x) = -\frac{x}{y_2(x)} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

• **Ví dụ 10** Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $x^3 + y^3 = 6x$ (*Lá Descartes*) tại điểm $(3, 3)$.

Giải

Đạo hàm hai vế phương trình theo x, ta được

$$3x^2 + 3y^2y' = 6y + 6xy' \text{ hay } x^2 + y^2y' = 2y + 2xy'$$

Giải ra đối với y' :

$$(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2 \text{ hay } y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

Khi $x = y = 3$ thì $y' = -1$. Do đó tiếp tuyến với đường cong tại (3, 3 có phương trình

$$y - 3 = -(x - 3) \quad \text{hay} \quad y = 6 - x.$$

2.8 Đạo hàm cấp cao

a) Khái niệm đạo hàm cấp cao

□ **Định nghĩa 5** Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm trong khoảng (a, b). Khi đó $f'(x)$ cũng là hàm của x và được gọi là đạo hàm cấp một của hàm $f(x)$. Nếu $f'(x)$ có đạo hàm thì $(f'(x))'$ gọi là đạo hàm cấp hai của $f(x)$ và kí hiệu là $f''(x)$.

Đạo hàm của đạo hàm cấp $n-1$ của $f(x)$ được gọi là đạo hàm cấp n của $f(x)$, kí hiệu là $f^{(n)}(x)$. Ta có

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Ta quy ước :

$$f^{(0)}(x) = f(x),\ f^{(1)}(x) = f'(x),\ f^{(2)}(x) = f''(x),\ f^{(3)}(x) = f'''(x).$$

b) Các phép toán về đạo hàm cấp cao

Δ **Định lí 6** *Giả sử các hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm cấp n trong (a, b). Khi đó*

i) $[f(x) \pm g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$.

ii) $[cf(x)]^{(n)} = cf^{(n)}(x)$.

iii) $[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$, *trong đó* $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

(Công thức Leibnitz).

• **Ví dụ 11** Cho $y = x^n$ (n nguyên dương). Ta có

$y' = nx^{n-1}$,

$y'' = n(n-1)x^{n-2}$,

. . . . . .

$y^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$,

. . . . . .

$y^{(n)} = n!$,

$y^{(n+1)} = 0$.

• **Ví dụ 12** Cho $y = e^{kx}$, k là hằng số. Ta có

$y' = ke^{kx}$,

$y'' = k.ke^{kx} = k^2e^{kx}$,

. . . . . .

$y^{(n)} = k^n e^{kx}$.

- **Ví dụ 13** Cho $y = \sin x$. Ta có

$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$,

$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$,

. . . .

$y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

- **Ví dụ 14** Cho $y = \cos x$.

Ta có $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ nên $y^{(n)} = \sin[(x + \frac{\pi}{2}) + n\frac{\pi}{2}] = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$.

- **Ví dụ 15** Cho $y = x\sin x$. Tính $y^{(10)}$.

Ta có

$$\begin{aligned} y^{(10)} &= (x\sin x)^{(10)} \\ &= C_{10}^0 (x)^{(0)} (\sin x)^{(10)} + C_{10}^1 (x)'(\sin x)^{(9)} \\ &= x(\sin x)^{(10)} + 10(\sin x)^{(9)} \\ &= x\sin(x + 5\pi) + 10\sin(x + 9\tfrac{\pi}{2}) \\ &= -x\sin x + 10\cos x. \end{aligned}$$

§3. Vi phân

3.1 Khái niệm vi phân

□ **Định nghĩa 6** Cho hàm $f(x)$ xác định trong (a, b) và $x_0 \in (a, b)$. Ch x_0 một số gia $\triangle x$ sao cho $x_0 + \triangle x \in (a, b)$. Nếu có thể biểu diễn

$$\triangle f = A.\triangle x + O(\triangle x),$$

trong đó A là hằng số, $O(\triangle x)$ là vô cùng bé cấp cao hơn $\triangle x$ khi $\triangle x \to 0$ t hàm $f(x)$ được gọi là khả vi tại x_0 và biểu thức $A.\triangle x$ được gọi là vi phâ của $f(x)$ tại x_0, kí hiệu df, $df(x_0)$. Ta có

$$df = A.\triangle x.$$

◦ **Nhận xét** Từ định nghĩa vi phân ta có $\triangle f = df + O(\triangle x)$. Khi $A \neq 0$ t

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{df} = \lim_{\triangle x \to 0} \left(1 + \frac{1}{A}.\frac{O(\triangle x)}{\triangle x}\right) = 1.$$

Do đó df là vô cùng bé tương đương với $\triangle f$ nhưng đơn giản hơn $\triangle f$.

3.2 Quan hệ giữa vi phân và đạo hàm. Công thức vi phân

△ **Định lí 7**

i) Nếu hàm $f(x)$ khả vi tại x_0 thì nó có đạo hàm tại x_0 và $A = f'(x_0)$.

ii) Ngược lại, nếu $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó khả vi tại x_0 và

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0).\Delta x}$$

Chứng minh

i) Giả sử $f(x)$ khả vi tại x_0. Khi đó ta có

$$\Delta f = A.\Delta x + O(\Delta x) \quad \text{hay} \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{O(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Vì $O(\Delta x)$ là vô cùng bé cấp cao hơn Δx nên $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A$.

Vậy $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và $f'(x_0) = A$.

ii) Ngược lại, giả sử $f(x)$ có đạo hàm tại x_0, tức là tồn tại $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$. Khi đó

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha, \quad \alpha \to 0 \text{ khi } \Delta x \to 0.$$

Suy ra

$$\Delta f = f'(x_0).\Delta x + \alpha.\Delta x.$$

Vì $\alpha.\Delta x$ là vô cùng bé cấp cao hơn Δx nên $f(x)$ khả vi tại x_0 và ta có $df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$. ■

⊙ **Chú ý** Nếu $f(x) = x$ thì $f'(x) = 1$. Khi đó

$$dx = df = 1.\Delta x = \Delta x,$$

tức là số gia của biến độc lập x trùng với vi phân của nó. Do đó người ta thường kí hiệu

$$\boxed{df = f'(x)dx}$$

Suy ra

$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx}}$$

Theo cách biểu diễn trên ta có

i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$. ii) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}.\dfrac{du}{dx}$.

3.3 Tính bất biến của dạng thức vi phân cấp một

Cho $y = f(x)$ thì $dy = f'(x)dx$.

Khi $x = x(t)$ là hàm của t thì ta có hàm hợp $y = f[x(t)]$. Khi đó

$$dy = (f \circ x)'(t)dt = f'[x(t)].x'(t)dt.$$

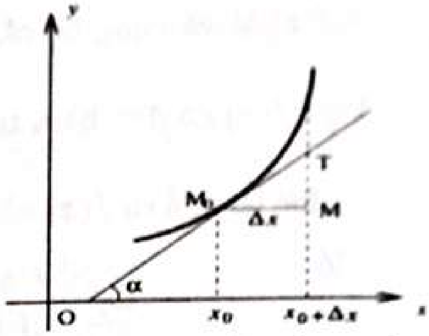
Vì $x'(t)dt = dx$ nên $dy = f'(x)dx$.

Vậy khi x là biến độc lập hay biến phụ thuộc thì ta vẫn có $dy = f'(x)dx$. Ta nói dạng thức vi phân cấp một có tính bất biến.

3.4 Ý nghĩa hình học của vi phân

Giả sử hàm $y = f(x)$ khả vi tại x_0. Gọi α là góc tạo bởi tiếp tuyến M_0T với đường cong tại $M_0(x_0, f(x_0))$ và chiều dương trục Ox. Ta có

$$df(x_0) = f'(x_0).\triangle x = \tan\alpha.M_0M = MT.$$



Vậy vi phân của hàm $y = f(x)$ ứng với x_0 và $\triangle x$ cho trước bằng số gia tung độ của tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$.

3.5 Ứng dụng vi phân để tính gần đúng

• Công thức gần đúng

Giả sử hàm $f(x)$ khả vi tại x_0. Ta có $\triangle f = df + O(\triangle x)$. Khi $|\triangle x|$ khá bé thì

$$\triangle f \simeq df \quad \text{hay} \quad f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)\triangle x.$$

Ta có công thức gần đúng

$$\boxed{f(x_0 + \triangle x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\triangle x}$$

• **Ví dụ 16** Tính gần đúng $\sin 46^o$.

Giải

Áp dụng công thức gần đúng cho hàm $f(x) = \sin x$, ta có

$$\sin(x_0 + \triangle x) \simeq \sin x_0 + \cos x_0.\triangle x.$$

Vì $46^o = 45^o + 1^o$ tương ứng với $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}$ nên ta chọn $x_0 = \frac{\pi}{4}$ và $\Delta x = \frac{\pi}{180}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\sin 46^0 = \sin(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{180}) &\simeq \sin\tfrac{\pi}{4} + \cos\tfrac{\pi}{4}.\tfrac{\pi}{180}\\ &\simeq \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}.\tfrac{3,1416}{180}\\ &\simeq 0,7194.\end{aligned}$$

3.6 Các quy tắc tính vi phân

Giả sử f và g là các hàm khả vi. Ta có

i) $d(f \pm g) = df \pm dg$.

ii) $d(fg) = gdf + fdg$.

iii) $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{gdf - fdg}{g^2} \quad (g^2 \neq 0)$.

3.7 Vi phân cấp cao

□ **Định nghĩa 7** Giả sử hàm $f(x)$ khả vi trong (a, b). Khi đó vi phân $df = f'(x)dx$ gọi là vi phân cấp một của hàm $f(x)$; nó là hàm của x với dx không đổi. Nếu df khả vi thì vi phân $d(df)$ gọi là vi phân cấp hai của hàm $f(x)$, kí hiệu là d^2f. Ta có $d^2f = d(df)$.

Một cách tổng quát, vi phân của vi phân cấp $n-1$ của hàm $f(x)$ gọi là vi phân cấp n của $f(x)$. Kí hiệu $d^nf = d(d^{n-1}f)$.

Hàm có vi phân đến cấp n gọi là khả vi đến cấp n.

• **Công thức**

Giả sử $f(x)$ có vi phân đến cấp n. Ta có

$df = f'(x)dx$ với dx không đổi.

$d^2f = d(df) = d(f'(x)dx)dx = f''(x)(dx)^2$, kí hiệu là $f''(x)dx^2$.

Một cách tổng quát ta có

$$\boxed{d^nf = f^{(n)}(x)dx^n}$$

⊙ **Chú ý** Từ công thức tính vi phân ta có $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^nf}{dx^n}$.

§4. Các định lí giá trị trung bình

4.1 Cực trị địa phương. Định lí Fermat

□ **Định nghĩa 8** Cho hàm $f(x)$ xác định trong (a, b) và $x_0 \in (a, b)$. Hà
$f(x)$ gọi là đạt cực tiểu (cực đại) địa phương tại x_0 nếu tồn tại một lân c
I của x_0 sao cho với mọi $x \in I$ ta có

$$f(x) \geq f(x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0)).$$

Khi đó x_0 được gọi là *điểm cực tiểu* (*cực đại*) địa phương của hàm $f(x$

Cực đại và cực tiểu địa phương gọi chung là *cực trị địa phương*.

△ **Định lí 8** (Fermat) *Giả sử hàm $f(x)$ xác định trong (a, b). Nếu $f(x$ đạt cực trị địa phương tại $x_0 \in (a, b)$ và nếu tồn tại $f'(x_0)$ (hữu hạn) t* $f'(x_0) = 0$.

Chứng minh

Giả sử $f(x)$ đạt cực đại tại x_0. Khi đó với mọi Δx mà $|\Delta x|$ khá bé ta c

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0.$$

Vì $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 nên

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Vì vậy ta có $f'(x_0) = 0$.

Nếu $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0, ta chứng minh tương tự.

• **Ý nghĩa hình học**

Nếu hàm $y = f(x)$ khả vi tại điểm cực trị của nó thì tiếp tuyến với đườ cong $y = f(x)$ tại điểm đó song song với trục Ox.

4.2 Các định lí giá trị trung bình

a) Định lí Rolle

△ **Định lí 9** (Rolle) *Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi tro (a, b) và $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

Chứng minh

Vì $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ nên $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất M và giá trị nh nhất m trên $[a, b]$.

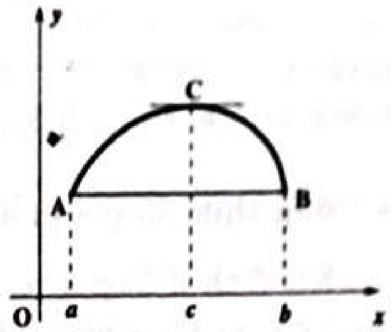
Nếu $M = m$ thì $f(x) = m = M, \quad \forall x \in [a,b]$. Suy ra $f'(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Nếu $M \neq m$ thì một trong hai số M, m phải khác $f(a) = f(b)$. Giả sử $M \neq f(a) = f(b)$. Khi đó $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất M tại $c \in (a,b)$. Ta suy ra $f(x)$ đạt cực đại tại c.

Theo định lí Fermat, ta có $f'(c) = 0$. ■

- **Ý nghĩa hình học**

Giả sử hàm $y = f(x)$ thoả mãn các điều kiện của định lí Rolle thì giữa hai điểm $A(a, f(a))$ và $B(b, f(b))$ trên đồ thị của hàm có cùng tung độ bao giờ cũng tồn tại điểm C, tại đó tiếp tuyến với đồ thị song song với trục hoành.



b) Định lí Cauchy

△ **Định lí 10** *Nếu các hàm $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$, khả vi trong khoảng (a,b) và $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$ thì tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{2.3}$$

Chứng minh

Xét hàm phụ $h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$.

Ta thấy $h(x)$ liên tục trên $[a,b]$, khả vi trong (a,b), $h(a) = h(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$ và

$$h'(x) = [f(b) - f(a)]g'(x) - [g(b) - g(a)]f'(x).$$

Theo định lí Rolle tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $h'(c) = 0$. Ta suy ra công thức (2.3). ■

c) Định lí Lagrange

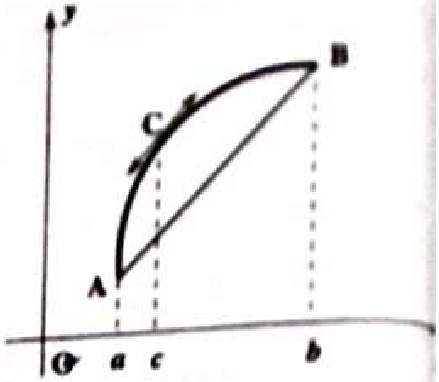
△ **Định lí 11** *Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$, khả vi trong khoảng (a,b) thì tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho*

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)}$$

Chứng minh Dùng định lí Cauchy với $g(x) = x$. ■

⊙ **Chú ý** Định lí Rolle là trường hợp đặc biệt của định lí Lagrange k...
$f(a) = f(b)$.

• **Ý nghĩa hình học**



Nếu các điều kiện của định lí 11 được thỏa mãn thì trên đường cong $y = f(x)$ luôn tìm được điểm $M(c, f(c))$ sao cho tiếp tuyến tại đó song song với dây cung AB, trong đó $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$.

• **Công thức số gia giới nội**

Xét định lí Lagrange. Đặt $a = x_0, b = x_0 + \Delta x$ thì $b - a = \Delta x$. V... $x_0 < c < x_0 + \Delta x$ nên có thể viết $c = x_0 + \theta\Delta x$ với $0 < \theta < 1$. Khi đó the... công thức Lagrange ta được

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta\Delta x).$$

Do đó ta có công thức số gia giới nội

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Từ công thức số gia giới nội, cho $\theta = \theta_0 \in (0, 1)$ thì ta được công thức gần đúng

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + f'(x_0 + \theta_0\Delta x)\Delta x}$$

• **Ví dụ 17** Tính gần đúng $\arctan 1,1$ bằng công thức số gia giới nội với $\theta_0 = \frac{1}{2}$.

Giải

Áp dụng công thức gần đúng cho hàm $f(x) = \arctan x$. Ta có

$$\arctan(x_0 + \Delta x) \simeq \arctan x_0 + \frac{\Delta x}{1 + (x_0 + \theta_0\Delta x)^2}.$$

Chọn $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,1$, ta có

$$\begin{aligned} \arctan 1,1 &\simeq \arctan 1 + \tfrac{0,1}{1+(1+\frac{0,1}{2})^2} \\ &\simeq \tfrac{\pi}{4} + 0,1\,.\,0,475 \\ &\simeq 0,8329. \end{aligned}$$

Lagrange

Cauchy

4.3 Quy tắc L' Hospital

a) Dạng vô định $\frac{0}{0}$

△ **Định lí 12 (L' Hospital 1)** *Giả sử các hàm $f(x)$ và $g(x)$ khả vi ở lân cận x_0, $f(x_0) = g(x_0) = 0$ và $g'(x) \neq 0$ ở lân cận x_0.*

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = L$ *thì* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L.$

Chứng minh

Vì $f(x_0) = g(x_0) = 0$ nên ta có thể viết

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

Theo định lí Cauchy, tồn tại một giá trị c nằm giữa x_0 và x sao cho

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Khi $x \to x_0$ thì $c \to x_0$. Do đó

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$ ■

⊙ **Chú ý** Định lí L'Hospital 1 còn đúng khi $x \to \infty$ hoặc $L = \infty$.

• **Ví dụ 18** Tìm $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^x - x^a}{x - a}$.

Giải Áp dụng quy tắc L'Hospital ta có

$$L = \lim_{x\to a} \frac{(a^x - x^a)'}{(x-a)'} = \lim_{x\to a} \frac{a^x \ln a - a x^{a-1}}{1} = a^a(\ln a - 1).$$

b) Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

△ **Định lí 13 (L'Hospital 2)** *Giả sử các hàm $f(x), g(x)$ khả vi ở lân cận điểm x_0 trừ x_0, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ và $g'(x) \neq 0$ ở lân cận x_0.*

Nếu $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = L$ *thì* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

⊙ **Chú ý** Định lí L'Hospital 2 còn đúng khi $x \to \infty$ hoặc $L = \infty$.

• **Ví dụ 19** Tìm $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

Giải Áp dụng quy tắc L'Hospital ta có

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \quad (\text{dạng } \frac{\infty}{\infty}).$$

Áp dụng quy tắc L'Hcspital lần nữa ta có

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

⊙ **Chú ý** Nếu $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ không tồn tại thì ta không thể khẳng định là $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ không tồn tại.

Xét giới hạn $L = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x}$.

Ta thấy $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1}$ không tồn tại, nhưng

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

c) Các dạng vô định $\infty - \infty$, $0.\infty$

Để khử các dạng vô định $\infty - \infty$ và $0.\infty$, ta dùng các phép biến đổi thích hợp để đưa về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$. Khi đó $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ có dạng vô định $0.\infty$. Ta biến đổi tích thành thương :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad (\text{dạng } \tfrac{0}{0})$$

hay

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad (\text{dạng } \tfrac{\infty}{\infty}).$$

• **Ví dụ 20** Tìm $L = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Giải Giới hạn có dạng $\infty - \infty$. Biến đổi ta có

$$L = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} \quad (\text{dạng } \frac{0}{0}).$$

Áp dụng quy tắc L'Hospital thì

$$L = \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x + x.\frac{1}{x}) - 1}{\ln x + (x-1).\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \quad (\text{dạng } \frac{0}{0}).$$

Áp dụng quy tắc L'Hospital lần nữa ta được

$$L = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

• **Ví dụ 21** Tìm $L = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$.

Giải Giới hạn có dạng $0.\infty$. Biến đổi ta có

$$L = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad (\text{dạng } \frac{\infty}{\infty}).$$

Áp dụng quy tắc L'Hospital thì

$$L = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

d) Các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Xét giới hạn $L = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ trong đó $f(x)$ có dạng vô định $1^\infty, 0^0$ hoặc ∞^0. Để khử dạng vô định ta có thể dùng các phương pháp sau :

** Phương pháp 1*

Phân tích $L = \lim\limits_{x\to x_0} e^{\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x)}$.

** Phương pháp 2*

Lấy ln ta có $\ln L = \lim\limits_{x\to x_0} \ln(f(x))$.

- **Ví dụ 22** Tìm $L = \lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

Giải Giới hạn có dạng vô định 1^∞. Biến đổi ta có

$$L = \lim_{x\to 2} e^{\ln(\frac{x}{2})^{\frac{1}{x-2}}} = e^{\lim_{x\to 2}\frac{\ln x-\ln 2}{x-2}} \quad (\text{dạng } \frac{0}{0}).$$

Áp dụng quy tắc L'Hospital ta được

$$L = e^{\lim_{x\to 2}\frac{1/x}{1}} = e^{1/2}.$$

- **Ví dụ 23** Tìm $L = \lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

Giải Giới hạn có dạng vô định 0^0. Ta có

$$\ln L = \ln(\lim_{x\to 0^+} x^x) = \lim_{x\to 0^+}\ln x^x = \lim_{x\to 0^+} x.\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad (\text{dạng}\frac{\infty}{\infty}).$$

Áp dụng quy tắc L'Hospital ta được

$$\ln L = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Vậy $L = e^0 = 1$.

- **Ví dụ 24** Tìm $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Giải Giới hạn có dạng vô định ∞^0. Ta có

$$L = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\ln x}} \quad (\text{dạng } \frac{\infty}{\infty}).$$

Áp dụng quy tắc L'Hospital ta được

$$L = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}\cdot(-\frac{1}{\sin^2 x})}{\frac{1}{x}}} = e^{-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}} = e^{-1}.$$

§5. Công thức Taylor

5.1 Công thức Taylor

△ **Định lí 14** *Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$, có đạo hàm hữu hạn đến cấp $n+1$ trong khoảng (a,b) và $x_0 \in (a,b)$ thì với mọi $x \in [a,b]$ ta có*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

với c nằm giữa x_0 và x.

Chứng minh

Đặt $R(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ và $G(x) = (x-x_0)^{n+1}$.

Ta có

$$\begin{aligned} R(x_0) &= R'(x_0) = \ldots = R^{(n)}(x_0) = 0 \\ G(x_0) &= G'(x_0) = \ldots = G^{(n)}(x_0) = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Theo định lí Cauchy ta có

$$\frac{R(x)}{G(x)} = \frac{R(x)-R(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{R'(x_1)}{G'(x_1)},$$

với x_1 nằm giữa x_0 và x. Ta sử dụng định lí Cauchy và (2.4) một lần nữa

$$\frac{R'(x_1)}{G'(x_1)} = \frac{R'(x_1)-R'(x_0)}{G'(x_1)-G'(x_0)} = \frac{R''(x_2)}{G''(x_2)}$$

với x_2 nằm giữa x_0 và x_1. Tiếp tục quá trình, sau $n+1$ bước ta được

$$\frac{R(x)}{G(x)} = \frac{R'(x_1)}{G'(x_1)} = \ldots = \frac{R^{(n+1)}(x_{n+1})}{G^{(n+1)}(x_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!},$$

với x_{n+1} nằm giữa x_0 và x_n nên cũng nằm giữa x_0 và x. Định lí được chứng minh với $c = x_{n+1}$. ■

⊙ **Chú ý**

i) Đa thức $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ gọi *là đa thức Taylor* và biểu thức $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ gọi là *phần dư bậc n* của $f(x)$. Ta có

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Ta có thể xấp xỉ $f(x)$ bởi $P_n(x)$ khi x ở khá gần x_0 bằng cách ngắt bỏ $R_n(x)$ với sai số

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$$

trong đó $M_{n+1} \geq |f^{(n+1)}(x)|$, $\forall x \in [a, b]$.

ii) Trong công thức Taylor cho $x_0 = 0$ ta được công thức Mac Laurin

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

với c nằm giữa 0 và x.

◇ **Nhận xét** Trong công thức Taylor cho $n = 0$ ta được công thức số gia giới nội

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0).$$

5.2 Khai triển Mac Laurin các hàm đơn giản

i) Hàm $f(x) = (1 + x)^m$ (m nguyên dương).

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}x^k+\ldots+x^m.$$

ii) Hàm $f(x) = e^x$.

Vì $f^{(k)}(x) = e^x$ nên $f^{(k)}(0) = 1$. Ta có

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

với c nằm giữa 0 và x.

Với $|x| \leq 1$, ta có $|R_n(x)| \leq \dfrac{e^c}{(n+1)!} \leq \dfrac{e}{(n+1)!} < \dfrac{3}{(n+1)!}$.

iii) Hàm $f(x) = \sin x$.

Ta có $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ nên $f^{(n)}(0) = \sin(n\frac{\pi}{2})$. Do đó

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \pm 1 & \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Theo công thức khai triển ta có

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{\sin(c + k\pi)}{(2k)!}x^{2k}$$

với c nằm giữa 0 và x.

Ta thấy $|R_{2k-1}(x)| \leq \frac{|x|^{2k}}{(2k)!}$.

iv) Hàm $f(x) = \cos x$. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2$

Ta có

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{\cos(c + (2k+1)\frac{\pi}{2})}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

với c nằm giữa 0 và x.

v) Hàm $f(x) = \ln(1+x)$.

Ta có

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1}$$

với c nằm giữa 0 và x.

⊙ **Chú ý** Bằng cách sử dụng các khai triển trên ta có thể khai triển Mac Laurin các hàm phức tạp hơn.

• **Ví dụ 25** Viết công thức Mac Laurin cho hàm $f(x) = e^{\sin x}$ đến x^3.

Giải

Áp dụng công thức khai triển của e^x ta có

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + O(\sin^3 x).$$

Mặt khác

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)\right)^2 = x^2 + O(x^3)$$

$$\sin^3 x = x^3 + O(x^3)$$

$\sin^3 x \sim x^3$ nên $O(\sin^3 x) = O(x^3)$.

Vậy

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right) + \left(\frac{1}{6}x^3 + O(x^3)\right) + O(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3). \end{aligned}$$

5.3 Ứng dụng công thức Taylor vào tính gần đúng

• **Ví dụ 26** Tính gần đúng số e khi cho $n = 8$ và đánh giá sai số.

Giải

Khi $n = 8$ ta có

$$e = e^1 \simeq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{8!} \simeq 2,71827.$$

Sai số $\delta < \frac{3}{9!} \simeq 0,00001.$

• **Ví dụ 27** Lập công thức tính gần đúng $\sin x$ khi $|x| \leq \frac{\pi}{4}$ với độ chính xác 0,0001.

Giải

Vì $|R_{2k}| \leq \dfrac{(\frac{\pi}{4})^{2k+1}}{(2k+1)!}$ nên ta tìm k sao cho $\frac{(\frac{\pi}{4})^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq 0,0001$. Ta thấy nếu $k \geq 3$ thì điều kiện đó được thoả mãn.

Vậy $\sin x \simeq x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$.

5.4 Dùng khai triển Mac Laurin để tìm giới hạn

Khai triển Mac Laurin có thể được dùng để tìm giới hạn. Ta xét qua các ví dụ dưới đây :

• **Ví dụ 28** Tìm giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

Giải

Ta có

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + O(x^3),$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + O(x^3),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^3).$$

Từ đó

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \frac{2\frac{x^3}{3!} + O(x^3)}{\frac{x^3}{3!} + O(x^3)}.$$

Vậy $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\frac{x^3}{3!}}{\frac{x^3}{3!}} = 2.$

• **Ví dụ 29** Tìm giới hạn $L = \lim\limits_{x\to\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$.

Giải

Ta có

$$x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x - x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{2} + x^2.O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Vậy $L = \frac{1}{2}$.

§6. Ứng dụng của đạo hàm

6.1 Tính đơn điệu

△ **Định lí 15** *Giả sử hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và có đạo hàm hữu hạn trong khoảng (a,b).*

i) Nếu $f(x)$ tăng (giảm) trên $[a,b]$ thì $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in (a,b)$ (điều kiện cần).

ii) Nếu $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\forall x \in (a,b)$ thì $f(x)$ tăng (giảm) trong $[a,b]$ (điều kiện đủ).

• **Ví dụ 30** Hàm $y = x^3$ thoả $y' = 3x^2 > 0$ với mọi $x \neq 0$. Vậy hàm $y = x^3$ luôn luôn tăng.

6.2 Cực trị

a) Điều kiện cần

◇ **Nhận xét**

i) Theo định lí Fermat nếu hàm $f(x)$ đạt cực trị tại x_0 và $f'(x_0)$ hữu hạn thì $f'(x_0) = 0$. Định lí Fermat cho phép ta hạn chế việc tìm điểm cực trị vào các điểm tại đó đạo hàm triệt tiêu. Ngoài ra, hàm có thể đạt cực trị tại những điểm tại đó đạo hàm không tồn tại.

ii) Điều kiện đạo hàm triệt tiêu là điều kiện cần nhưng không đủ để hàm đạt cực trị. Có những điểm x_0 tại đó $f'(x_0) = 0$ nhưng hàm không đạt cực trị tại đó. Chẳng hạn, hàm $y = x^3$ có $y' = 3x^2 = 0$ tại $x = 0$ nhưng hàm luôn tăng.

□ **Định nghĩa 9**

x_0 được gọi là *điểm dừng* của hàm $f(x)$ nếu $f'(x_0) = 0$.
x_0 được gọi là *điểm kì dị* của hàm $f(x)$ nếu $f'(x_0)$ không tồn tại.

Điểm dừng và điểm kì dị gọi chung là *điểm tới hạn*.

b) Điều kiện đủ

△ **Định lí 16** (**Điều kiện đủ thứ nhất**) *Giả sử hàm $f(x)$ liên tục ... (a,b), có đạo hàm ở lân cận x_0 (có thể trừ x_0) và x_0 là điểm tới hạn ... hàm $f(x)$.*

i) Nếu khi x đi qua x_0 mà $f'(x)$ đổi dấu từ (-) sang (+) (từ (+) ... (-)) thì $f(x)$ đạt cực tiểu (cực đại) tại x_0.

ii) Nếu khi x đi qua x_0 mà $f'(x)$ không đổi dấu thì $f(x)$ không đạt ... trị tại x_0.

• **Ví dụ 31** Tìm cực trị của hàm $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$.

Giải

Ta có $y' = \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2}{3}\dfrac{(x-1)}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$.

$y' = 0$ khi $x = \frac{2}{5}$, y' không tồn tại khi $x = 0$.

x	$-\infty$		0		2/5		$+\infty$
$5x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\sqrt[3]{x}$		$-$	0	$+$		$+$	
y'		$+$	||	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$	$\nearrow$	

Ta thấy hàm đạt cực tiểu tại $x = \frac{2}{5}$ với $y_{ct} = y(\frac{2}{5})$ và hàm đạt cực đ... tại $x = 0$ với $y_{cđ} = y(0) = 0$.

△ **Định lí 17** (**Điều kiện đủ thứ hai**) *Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm liê... tục đến cấp hai ở lân cận x_0, $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) \neq 0$.*

i) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

ii) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.

• **Ví dụ 32** Tìm cực trị của hàm $y = x^4 - 4x^3$.

Giải

Ta có

$$y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3),$$
$$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2).$$

$y' = 0$ khi $x = 0$ hoặc $x = 3$.

$y''(3) = 36 > 0$ nên hàm đạt cực tiểu tại $x = 3$ và $y_{ct} = y(3) = -27$.

$y''(0) = 0$, định lí 17 không cho ta biết hàm có đạt cực trị tại $x = 0$ hay không. Tuy nhiên, ta thấy y' không đổi dấu qua $x = 0$ nên hàm không đạt cực trị tại điểm này.

△ **Định lí 18** *Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp n ở lân cận x_0 và $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Khi đó*

i) Nếu n chẵn thì $f(x)$ đạt cực trị tại x_0 :

+ Nếu $f^{(n)}(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

+ Nếu $f^{(n)}(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

ii) Nếu n lẻ thì $f(x)$ không đạt cực trị tại x_0. ▾

• **Ví dụ 33** Tìm cực trị của hàm $y = 1 - x^4$.

Giải

Ta có

$y' = -4x^3$, $y' = 0$ tại $x = 0$,

$y'' = -12x^2$, $y''(0) = 0$,

$y''' = -24x$, $y'''(0) = 0$,

$y^{(4)} = -24 < 0$.

Vậy hàm đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{cđ} = y(0) = 1$.

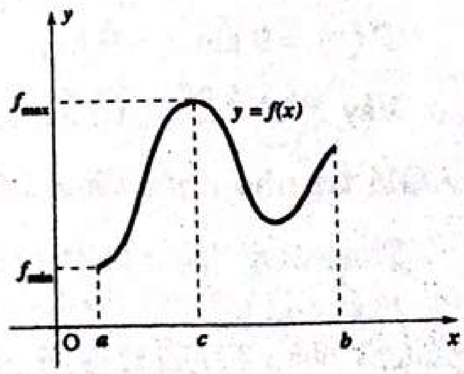
6.3 Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất

□ **Định nghĩa 10** Hàm $f(x)$ được gọi là đạt giá trị nhỏ nhất (giá trị lớn nhất) tại điểm x_0 trong khoảng I nếu $f(x) \geq f(x_0)$ $(f(x) \leq f(x_0))$, $\forall x \in I$. Ta nhắc lại định lí đã được giới thiệu ở chương 1.

△ **Định lí 19** *Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn này.*

⋄ **Nhận xét**

Nếu hàm liên tục $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất tại $c \in (a, b)$ thì c là điểm tới hạn của hàm $f(x)$. Ngoài ra, hàm còn có thể đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất tại hai đầu mút a, b.



• Cách tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$

Bước 1 Tìm các điểm tới hạn của $f(x)$ trong khoảng (a, b).

Bước 2 Tính giá trị của $f(x)$ tại các điểm tới hạn và tại hai đầu mút a, b.

Bước 3 Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trong bước 2 tương ứng là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất cần tìm.

• Ví dụ 34 Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm $f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$ trên đoạn $[-1, 1]$.

Giải

Ta có $f'(x) = \dfrac{(1-x)^{2/3}}{3x^{2/3}} - \dfrac{2x^{1/3}}{3(1-x)^{1/3}} = \dfrac{1-3x}{3x^{2/3}(1-x)^{1/3}}$.

$f'(x) = 0$ tại $x = \frac{1}{3}$ và $f(\frac{1}{3}) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

$f'(x)$ không tồn tại tại $x = 0, x = 1$ và $f(0) = f(1) = 0$.

Tại đầu mút $x = -1$ ta có $f(-1) = -\sqrt[3]{4}$.

Vậy $f_{min} = -\sqrt[3]{4}$ tại $x = -1$ và $f_{max} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ tại $x = \frac{1}{3}$.

• Ví dụ 35 Tìm hai số không âm có tổng bằng 60 sao cho tích của số này với bình phương của số kia là lớn nhất.

Giải

Gọi một số là x thì số còn lại là $60 - x$. Theo giả thiết thì $0 \leq x \leq 60$.

Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm $P(x) = (60-x)x^2$ trên đoạn $[0, 60]$.

Ta thấy $P(x) \geq 0$ trên $[0, 60]$ và $P(0) = P(60) = 0$ nên $P_{min} = P(0) = P(60)$. Do đó hàm chỉ có thể đạt giá trị lớn nhất tại điểm dừng thuộc $(0, 60)$.

$$P'(x) = -3x^2 + 120x = 3x(40 - x)$$

$P'(x) = 0$ khi $x = 0$ hay $x = 40$ ($x = 0$ bị loại).

Vậy $P(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 40$. Khi đó số còn lại là 20.

• Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trong khoảng

Trong thực hành ta thường gặp trường hợp phải tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm $f(x)$ trong khoảng (a, b). Khi đó ta không thể áp dụng phương pháp đã giới thiệu ở trên. Định lí sau đây giúp ta cách để giải quyết

△ **Định lí 20** *Giả sử hàm $f(x)$ liên tục trong khoảng (a, b) và*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L, \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = M.$$

Khi đó

i) Nếu $f(u) > L$ và $f(u) > M$ với u nào đó thuộc (a, b) thì $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên (a, b).

ii) Nếu $f(u) < L$ và $f(u) < M$ với u nào đó thuộc (a, b) thì $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên (a, b).

• **Ví dụ 36** Tìm giá trị lớn nhất của hàm $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ trong $(0, 1)$.

Giải

Ta thấy $f(x)$ liên tục trong $(0, 1)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ và $f(\frac{1}{3}) = -\frac{9}{2} > -\infty$ nên $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trong $(0, 1)$ và giá trị lớn nhất này phải đạt tại một điểm tới hạn của $f(x)$ trong khoảng $(0, 1)$. Ta có

$$f'(x) = -\frac{2x - 1}{(x^2 - x)^2}.$$

$f'(x) = 0$ khi $x = \dfrac{1}{2}$ và $f(\dfrac{1}{2}) = -4$. Vậy $f_{max} = -4$ tại $x = \dfrac{1}{2}$.

• **Ví dụ 37** Người ta muốn làm một cái can hình trụ có thể tích 1 lít (1000 cm^3) để chứa chất lỏng. Tìm kích thước của can sao cho để làm can này ta tốn ít nhiên liệu nhất.

Giải

Gọi r là bán kính và h là chiều cao của can. Diện tích toàn phần của can là

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Can có thể tích 1000 cm^3 nên $\pi r^2 h = 1000$. Suy ra $h = 1000/(\pi r^2)$. Thay vào biểu thức của S ta được

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}.$$

Để tốn ít nhiên liệu nhất, ta tìm giá trị nhỏ nhất của hàm

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \qquad (0 < r < +\infty).$$

Ta thấy S là hàm liên tục trong khoảng $(0, +\infty)$, $\lim\limits_{r\to 0^+} S(r) = +\infty$ và $\lim\limits_{r\to+\infty} S(r) = +\infty$ nên $S(r)$ có giá trị nhỏ nhất trong khoảng $(0, +\infty)$ và giá trị nhỏ nhất này phải đạt tại một điểm tới hạn của $S(r)$. Ta có

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}.$$

$S'(r) = 0$ khi $\pi r^3 = 500$. Ta có điểm tới hạn $r = \sqrt[3]{500/\pi}$.

Vì $S(r)$ chỉ có duy nhất điểm tới hạn trong khoảng $(0, +\infty)$ nên giá trị nhỏ nhất phải đạt tại $r = \sqrt[3]{500/\pi}$. Giá trị tương ứng của h là

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{500/\pi} = 2r.$$

Vậy để tốn ít nhiên liệu nhất thì bán kính của can là $\sqrt[3]{500/\pi}$ và chiều cao phải gấp đôi bán kính.

6.4 Tính lồi lõm. Điểm uốn

a) Tính lồi, lõm của đường cong

□ **Định nghĩa 11**

Đường cong $C : y = f(x)$ gọi là lồi (lõm) tại x_0 nếu trong một lân cận của x_0 mọi điểm của C đều nằm dưới (trên) tiếp tuyến với C tại x_0.

Đường cong lồi (lõm) trong khoảng (a, b) nếu nó lồi (lõm) tại mọi điểm trong khoảng này.

△ **Định lí 21** *Cho hàm $f(x)$ xác định trong (a, b).*

Nếu $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) với mọi $x \in (a, b)$ thì đường cong $y = f(x)$ lồi (lõm) trong (a, b).

b) Điểm uốn

□ **Định nghĩa 12** Điểm phân cách cung lồi và cung lõm của đường cong được gọi là điểm uốn của đường cong.

△ **Định lí 22** *Giả sử hàm $f(x)$ liên tục tại x_0, khả vi đến cấp hai ở lân cận x_0 (có thể trừ x_0). Nếu $f''(x)$ đổi dấu khi x đi qua x_0 thì $(x_0, f(x_0))$ là điểm uốn của đường cong $y = f(x)$.*

• **Ví dụ 38** Xét tính lồi, lõm và tìm điểm uốn của đường cong $y = e^{-x^2}$.

Giải

Ta có

$y' = -2xe^{-x^2}$,

$y'' = 4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2} = 2(2x^2-1)e^{-x^2} = 0$ khi $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
y''		+	0	−	0	+	

Vậy đường cong lõm trong hai khoảng $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$, lồi trong khoảng $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Hai điểm $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$ là các điểm uốn.

6.5 Tiệm cận

a) Định nghĩa

Đường thẳng Δ gọi là đường tiệm cận của đường cong $y = f(x)$ nếu khoảng cách từ điểm M trên đường cong đến Δ dần đến 0 khi M đi ra vô tận dọc theo đường cong.

b) Tiệm cận đứng

Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ thì đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đường cong $y = f(x)$.

• **Ví dụ 39**

i) Đường $y = x^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$ có hai tiệm cận đứng $x = 0$ và $x = 1$.

ii) Đường $y = \tan x$ có vô số tiệm cận đứng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) Tiệm cận ngang

Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ thì đường thẳng $y = b$ là tiệm cận ngang của đường cong $y = f(x)$.

• **Ví dụ 40**

i) Đường $y = \dfrac{1}{x}$ có tiệm cận ngang là trục hoành.

ii) Đường $y = \arctan x$ có tiệm cận ngang phía trái là $y = -\dfrac{\pi}{2}$ và tiệm cận ngang phía phải là $y = \dfrac{\pi}{2}$.

d) Tiệm cận xiên

Đường thẳng $\Delta : y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đường cong $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$.

Ta có

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax].$$

• **Ví dụ 41** Đường cong $y = \frac{1}{x^2} + x + e^{-x^2}$ có tiệm cận xiên $y = x$ vì $\lim\limits_{x\to\infty}[y - x] = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x^2} + e^{-x^2}) = 0$.

6.6 Khảo sát hàm số

Việc khảo sát hàm số thường được tiến hành theo các bước sau đây :

i) Tìm miền xác định, các điểm gián đoạn của hàm. Xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn (nếu có).

ii) Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến, cực trị, khoảng lồi, lõm, điểm uốn của đồ thị.

iii) Tìm các đường tiệm cận của đồ thị.

iv) Vẽ đồ thị : xác định giao điểm của đồ thị với các trục và tiếp tuyến với đồ thị tại các điểm đặc biệt (nếu có).

• **Ví dụ 42** Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$.

Giải

Hàm số xác định với mọi $x \neq 0$.

$y' = \dfrac{3 - x^2}{x^4}$, $y' = 0$ khi $x = \pm\sqrt{3}$ và y' không tồn tại khi $x = 0$.

$y'' = \dfrac{2(x^2 - 6)}{x^5}$, $y'' = 0$ khi $x = \pm\sqrt{6}$ và $y(-\sqrt{6}) = -5\frac{\sqrt{6}}{36}$, $y(\sqrt{6}) = 5\frac{\sqrt{6}}{36}$.

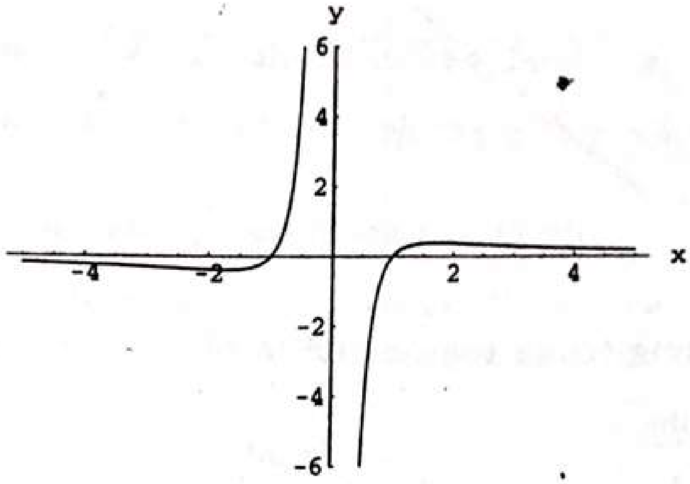
Vì $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2 - 1}{x^3} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2 - 1}{x^3} = -\infty$ nên đồ thị có tiệm cận đứng $x = 0$ ở hai nhánh.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2 - 1}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2 - 1}{x^3} = 0$ nên đồ thị có tiệm cận ngang $y = 0$

ở hai nhánh.

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$\sqrt{6}$		$+\infty$
y'		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
y''		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\Vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$			$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow +\infty$	$\Vert$	$-\infty \nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$			0

* Đồ thị của hàm số cho bởi hình sau :



- **Ví dụ 43** Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = xe^{1/x}$.

Giải

Hàm số xác định với mọi $x \neq 0$.

$y' = \dfrac{x-1}{x}e^{1/x}$, $y' = 0$ khi $x = 1$ và $y(1) = e$, y' không xác định khi $x = 0$.

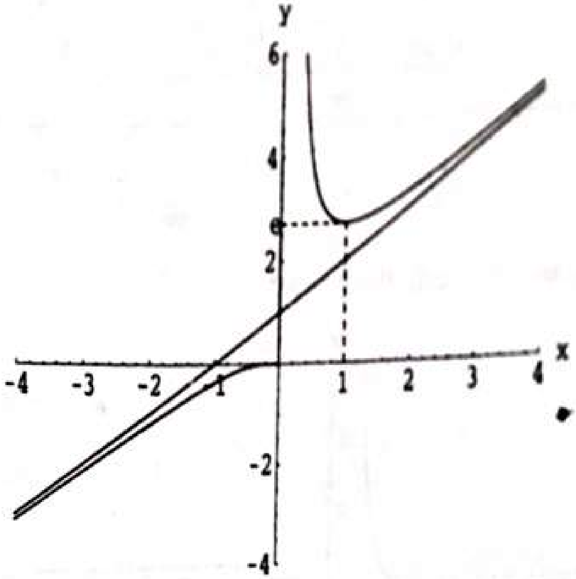
$y'' = \dfrac{1}{x^3}e^{1/x}$, $y'' > 0$ khi $x > 0$, $y'' < 0$ khi $x < 0$. Do đó đồ thị lõm trong khoảng $(0, +\infty)$ và lồi trong khoảng $(-\infty, 0)$, đồ thị không có điểm uốn.

Vì $\lim\limits_{x\to 0^-} y = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+} xe^{1/x} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$ nên đồ thị có tiệm cận đứng $x = 0$ với nhánh phải.

Vì $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{1/x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x) = \lim\limits_{x\to\infty}(xe^{1/x}-x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{1/x}-1}{1/x} = 1$ nên đồ thị có tiệm cận xiên $y = x + 1$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y''		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\Vert$	$+\infty \searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

* Đồ thị của hàm số cho bởi hình sau :

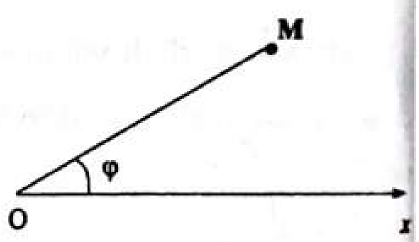


6.7 Đường cong trong toạ độ cực

a) Hệ toạ độ cực

Trong mặt phẳng chọn một điểm cố định O gọi là cực và một trục Ox đi qua O gọi là trục cực.

Vị trí của điểm M trong mặt phẳng hoàn toàn được xác định bởi cặp (r, φ), trong đó



$$r = \overline{OM}$$
$$\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}).$$

Cặp (r, φ) gọi là toạ độ cực của điểm M, r gọi là *bán kính vector* của điểm M và φ là *góc cực* của điểm M.

Với $0 \leq \varphi < 2\pi$, $r \geq 0$, ta có tương ứng 1-1 giữa điểm trong mặt phẳng và cặp (r, φ). Gốc toạ độ có thể xem ứng với $r = 0$ và φ tuỳ ý.

b) Liên hệ giữa toạ độ Descartes và toạ độ cực

Chọn hệ trục toạ độ Descartes vuông góc sao cho gốc O trùng với cực, trục Ox trùng với trục cực. Ta có công thức liên hệ :

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

và ngược lại

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\varphi &= \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Trong toạ độ cực ta có $\boxed{x^2+y^2=r^2}$.

c) Phương trình đường cong trong toạ độ cực

Dạng $F(r,\varphi)=0$ hay $r=r(\varphi)$.

- **Ví dụ 44**

i) Đường tròn tâm O bán kính a có phương trình $r=a$.

ii) Tia Ou tạo với Ox một góc $\frac{\pi}{3}$ có phương trình $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

d) Tiếp tuyến của đường cong trong toạ độ cực

Cho đường cong có phương trình trong toạ độ cực : $r=r(\varphi)$. Gọi V là góc giữa bán kính cực của điểm M và tiếp tuyến với đường cong tại M. Ta có

$$\tan V=\frac{r}{r'}.$$

Ta thấy khi $\tan V=0$ thì tiếp tuyến trùng với bán kính cực. Khi $\tan V=\infty$ thì tiếp tuyến vuông góc với bán kính cực.

e) Khảo sát và vẽ đường cong trong toạ độ cực

Khảo sát đường cong trong toạ độ cực được tiến hành theo các bước :

i) Tìm miền xác định của hàm số.

ii) Xét tính đối xứng, tính tuần hoàn của hàm số.

Nếu hàm số $r(\varphi)$ tuần hoàn với chu kì ω thì chỉ cần khảo sát và vẽ đường cong trong một khoảng có độ dài ω. Ta nhận được toàn bộ đường cong từ phần đường cong đã vẽ bằng phép quay liên tiếp quanh tâm O với các góc quay ω, 2ω, ...

Nếu $r(\varphi)$ là hàm số chẵn thì đường cong nhận trục cực làm trục đối xứng. Nếu $r(\varphi)$ là hàm số lẻ thì đường cong nhận đường thẳng đi qua cực và vuông góc với trục cực làm trục đối xứng.

iii) Tính đạo hàm $r'=r'(\varphi)$ và xét dấu của $r'(\varphi)$ để xác định các khoảng tăng, giảm của r theo φ.

iv) Tìm $\tan V$ tại các điểm đặc biệt.

v) Lập bảng biến thiên.

vi) Vẽ đường cong.

• **Ví dụ 45** Khảo sát và vẽ đường hình tim (*đường Cardioide*) có phương trình $r = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$.

Giải

Hàm số xác định với mọi $\varphi \in \mathbb{R}$.

Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π nên ta chỉ cần khảo sát đường trong khoảng $[-\pi, \pi]$.

Hàm số chẵn, do đó xét trong khoảng $[0, \pi]$ rồi thực hiện phép đối xứng qua trục cực.

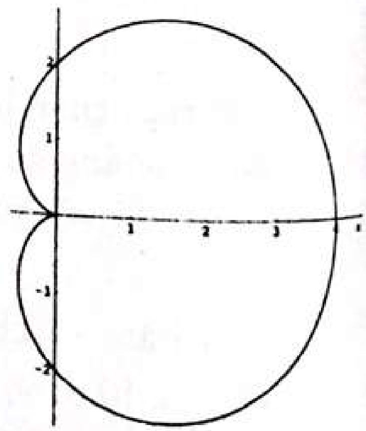
$$\tan V = \frac{r}{r'} = \frac{a(1+\cos\varphi)}{-a\sin\varphi} = \frac{-2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = -\cot\frac{\varphi}{2} = \tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

Suy ra $V = \dfrac{\varphi}{2} + \dfrac{\pi}{2}$.

Ta có bảng biến thiên sau :

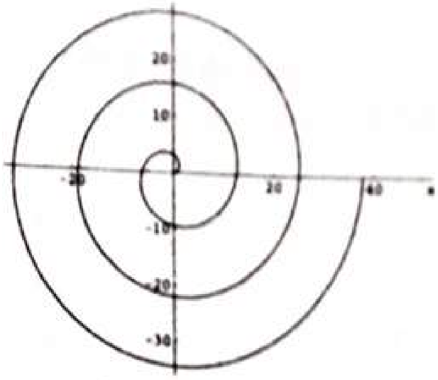
φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
r'			$-$		
r	$2a$		a		0
$\tan V$	$-\infty$		-1		0

Dựa vào bảng biến thiên, ta vẽ phần đường cong ứng với $\varphi \in [0, \pi]$. Lấy đối xứng qua trục cực ta được toàn bộ đường cong.



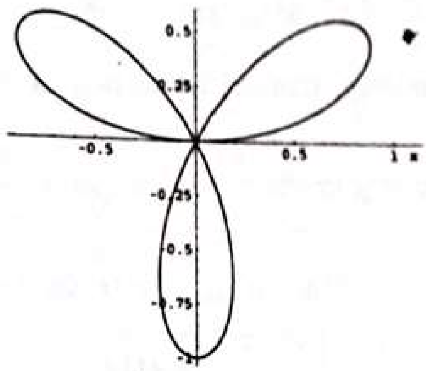
f) Một số đường cong trong toạ độ cực

i) *Đường xoắn ốc Archimède* : $r = a\varphi$ $(a > 0)$



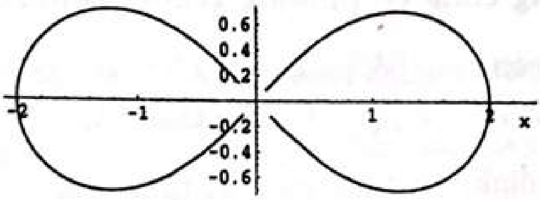
Đường xoắn ốc $r = 2\varphi$.

ii) *Hoa hồng ba cánh* : $r = a\sin 3\varphi$ $(a > 0)$



Đường $r = \sin 3\varphi$.

iii) *Đường Lemniscat Bernoulli* : $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ $(a > 0)$



Đường $r^2 = 4\cos 2\varphi$.

6.8 Đường cong cho bởi phương trình tham số

a) Phương trình tham số của đường cong

Xét hệ hai hàm

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ứng với mỗi giá trị của t ta có một cặp (x, y). Khi t biến thiên thì điểm $M(\varphi(t), \psi(t))$ vạch nên một đường cong C trong mặt phẳng toạ độ. Ta gọi (2.5) là phương trình tham số của C.

• **Ví dụ 46**

i) Đường tròn tâm O bán kính R có phương trình tham số

$$x = R\cos t$$
$$y = R\sin t.$$

ii) Elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ có phương trình tham số

$$x = a\cos t$$
$$y = b\sin t.$$

b) Đạo hàm theo tham số

Giả sử đường cong C có phương trình tham số (2.5), trong đó $y = y(x)$

Do tính bất biến của biểu thức vi phân nên ta có

$$dy = y'(x)dx \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Mặt khác, ta có $dy = \psi'(t)dt$ và $dx = \varphi'(t)dt$, do đó

$$\boxed{y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}$$

c) Khảo sát đường cong có phương trình tham số

Khảo sát đường cong cho bởi phương trình tham số được tiến hành tương tự như khảo sát hàm số $y = f(x)$. Cụ thể theo các bước sau :

- Tìm miền xác định, xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn.
- Khảo sát sự biến thiên với chú ý $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.
- Tìm các đường tiệm cận :

Nếu $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty$ thì $x = a$ là tiệm cận đứng.

Nếu $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = b$ thì $y = b$ là tiệm cận ngang.

Nếu $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a$, $\lim\limits_{t\to t_0} [y(t) - a.x(t)] = b$ thì $y = ax + b$ là tiệm cận xiên.

• **Ví dụ 47** Khảo sát và vẽ đường cong cho bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad (a > 0) \quad \textit{(Đường hình sao)}$$

Giải

Ta thấy x và y xác định với mọi t và luôn thuộc đoạn $[-a, a]$. Ngoài ra, x, y là các hàm tuần hoàn với chu kì 2π nên ta chỉ cần khảo sát đường cong trên đoạn $[0, 2\pi]$.

$x_t' = -3a\cos^2 t \sin t = 0$ khi $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$;

$y' = 3a\sin^2 t \cos t = 0$ khi $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

Ta có bảng biến thiên sau :

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
x_t'	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0
x	a	$\searrow$	0	$\searrow$	$-a$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	a
y_t'	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0
y	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0	$\searrow$	$-a$	$\nearrow$	0

Chú ý rằng ta có

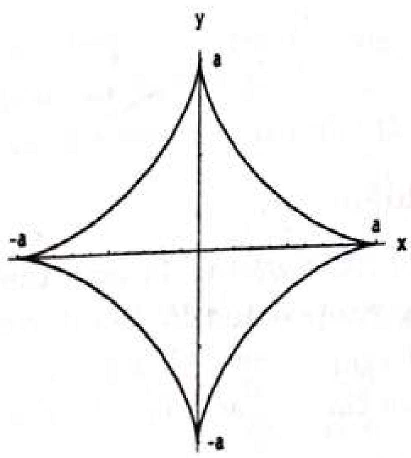
$$y'(x) = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{3a\sin^2 t \cos t}{-3a\cos^2 t \sin t} = -\tan t.$$

Ta thấy :

+ $y'(x) = 0$ tại $t = 0, \pi, 2\pi$ và tại các điểm này tiếp tuyến nằm ngang;

+ $y'(x) = \infty$ tại $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ và tại các điểm này tiếp tuyến thẳng đứng.

Đồ thị cho bởi hình dưới đây :

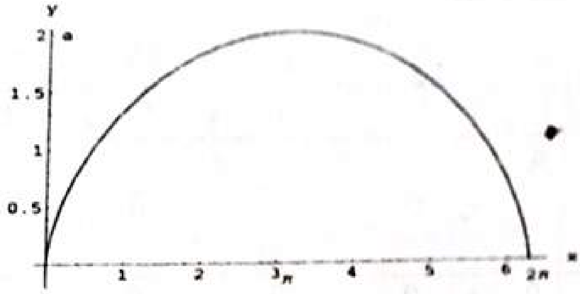


• **Chú ý.** Từ phương trình tham số $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ ta có $x^{2/3} = a^{2/3}\cos^2 t$, $y^{2/3} = a^{2/3}\sin^2 t$ nên đường hình sao còn có phương trình dạng ẩn:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

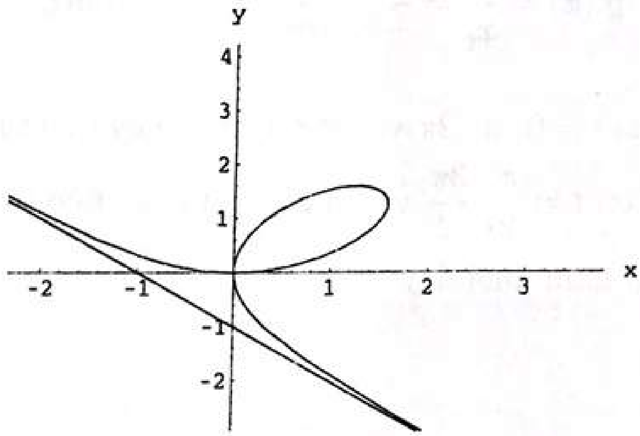
d) Một số đường cong có phương trình tham số

i) *Đường cycloid* : $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$



ii) *Lá Descartes* :

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \quad (a > 0) \quad \text{hay} \quad x^3 + y^3 - 3axy = 0$$



6.9 Tốc độ biến thiên

Đạo hàm $f'(x_0)$ cho ta biết về tốc độ biến thiên của $f(x)$ tại x_0. Khi $f'(x_0) > 0$ thì $f(x)$ đang tăng với tốc độ $f'(x_0)$, còn khi $f'(x_0) < 0$ thì $f(x)$ đang giảm với tốc độ $|f'(x_0)|$. Trong phần này, ta nghiên cứu các bài toán liên quan đến tốc độ biến thiên. Các bước giải quyết bài toán như sau :

Bước 1 Kí hiệu các đại lượng biến thiên và xem chúng như là hàm theo thời gian t.

Bước 2 Xác định đại lượng đã biết và đại lượng chưa biết.

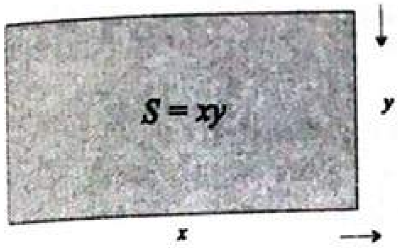
Bước 3 Lập phương trình liên quan giữa các đại lượng.

Bước 4 Tính đạo hàm hai vế của phương trình trên theo t và giải ra đối với đạo hàm của đại lượng cần biết.

Bước 5 Tính giá trị đạo hàm của đại lượng cần biết tại thời điểm đang xét và kết luận về tốc độ biến thiên.

• **Ví dụ 48** Diện tích của hình chữ nhật thay đổi như thế nào nếu chiều dài là 10 cm đang tăng với tốc độ $2cm/s$ và chiều rộng là 8 cm đang giảm với tốc độ 3 cm/s?

Giải



Gọi $x(t), y(t)$ lần lượt là chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật tại thời điểm t (đơn vị cm).

Diện tích của hình chữ nhật tại thời điểm t là $S(t) = x(t)y(t)$.

Ta có

$$S'(t) = x'(t)y(t) + x(t)y'(t).$$

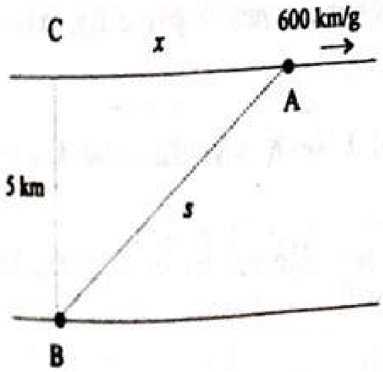
Tại thời điểm t_0 đang xét thì $x(t_0) = 10$ và $y(t_0) = 8$ với $x'(t_0) = 2$ và $y'(t_0) = -3$ (chú ý là dấu trừ cho thấy y đang giảm) nên

$$S'(t_0) = x'(t_0)y(t_0) + x(t_0)y'(t_0) = 2 \,.\, 8 + 10 \,.\, (-3) = -14.$$

Vậy diện tích của hình chữ nhật đang giảm ở tốc độ 14 cm^2/s.

• **Ví dụ 49** Một máy bay đang bay theo phương nằm ngang với vận tốc 600 km/g. Khi bay đến trạm tín hiệu rada thì máy bay ở độ cao 5 km. Hỏi khoảng cách giữa máy bay và trạm thay đổi như thế nào sau đó 1 phút?

Giải



Giả sử trạm tín hiệu đặt tại điểm B, sau t phút máy bay ở vị trí A và BC = 5 km.

Gọi $x(t), s(t)$ lần lượt là khoảng cách giữa vị trí của máy bay ở thời điểm t và điểm C, điểm B (đơn vị tính theo giờ). Ta có

$$s(t) = \sqrt{x^2(t) + 25}, s'(t) = \frac{x(t).x'(t)}{\sqrt{x^2(t) + 25}}.$$

Tại thời điểm t_0 đang xét ta có $x'(t_0) = 600\ km/g = 10\ km/phút$, $x(t_0) = 10\ km$. Do đó

$$s'(t_0) = \frac{x(t_0).x'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+25}} = \frac{10.600}{5\sqrt{5}} = \frac{1.200}{\sqrt{5}} \simeq 536,7\ km/g.$$

Vậy tại thời điểm 1 phút sau khi máy bay bay qua trạm tín hiệu thì khoảng cách từ máy bay đến trạm tín hiệu tăng với tốc độ 536,7 km/g.

6.10 Vận tốc, gia tốc

i) Vận tốc

Giả sử một vật chuyển động dọc theo trục Ox, có vị trí theo thời gian là $x = x(t)$.

* Vận tốc trung bình của vật trong khoảng (thời gian) $[t + \Delta t]$ là :

$$v_{tb} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

* Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t là

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t).$$

Vận tốc của vật tại thời điểm t cho ta biết độ nhanh, chậm của chuyển động. Ngoài ra, vận tốc còn cho ta biết hướng chuyển động của vật.

+ Nếu $v(t) > 0$ thì $x(t)$ tăng : vật đang chuyển động về bên phải

+ Nếu $v(t) < 0$ thì $x(t)$ giảm : vật đang chuyển động về bên trái

+ Nếu $v(t) = 0$ tại $t = t_0$ thì tại thời điểm này vật ở trạng thái dừng

⊙ **Chú ý** Vận tốc bao gồm cả độ nhanh chậm của chuyển động, còn tốc độ là giá trị tuyệt đối của vận tốc.

• **Ví dụ 50** Một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox có phương trình

$$x = t^2 - 4t + 2.$$

a) Xác định vận tốc của chất điểm khi $t = 3$, $t = 4$ và vận tốc trung bình của chất điểm giữa thời điểm $t = 3$ và $t = 4$.

b) Xác định khoảng thời gian mà trong đó chất điểm chuyển động về bên trái, bên phải.

Giải

Vận tốc của chất điểm tại thời điểm t là $v(t) = x'(t) = 2t - 4$.

a) Ta có $v(3) = 2$, $v(4) = 4$ và vận tốc trung bình của chất điểm giữa thời điểm $t = 3$ và $t = 4$ là

$$\frac{x(4) - x(3)}{4 - 3} = \frac{2 - (-1)}{4 - 3} = 3.$$

b) Ta có $v(t) = 0$ khi $t = 2$.

Khi $0 < t < 2$ thì $v(t) < 0$ nên chất điểm chuyển động về phía bên trái.

Khi $t > 2$ thì $v(t) > 0$ nên chất điểm chuyển động về phía bên phải.

ii) Gia tốc

Tốc độ biến thiên của vận tốc theo thời gian của vật chuyển động thẳng gọi là gia tốc của vật. Kí hiệu $a(t)$.

Ta có $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

Nếu $a(t) > 0$ thì vận tốc tăng. Trong trường hợp này, không nhất thiết tốc độ tăng. Bảng sau cho ta chi tiết về chuyển động :

Vận tốc	Gia tốc	Hướng chuyển động	Tốc độ
+	+	về bên phải	tăng
+	-	về bên phải	giảm
-	+	về bên trái	giảm
-	-	về bên trái	tăng

• **Ví dụ 51** Một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox có phương trình

$$x(t) = t^3 - 6t + 1.$$

a) Xác định gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc bằng 0.

b) Tìm khoảng thời gian mà chất điểm đang tăng tốc về phía bên phải.

Giải

a) Ta có $x'(t) = 3t^2 - 6 = 3(t^2 - 2)$.

$v(t) = x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{2}$.

$a(t) = v'(t) = 6t$.

Gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = \pm\sqrt{2}$ là $a(\pm\sqrt{2}) = \pm 6\sqrt{2}$.

b) Để chất điểm đang tăng tốc về phía bên phải thì $v(t) > 0$ và $a(t) > 0$. Suy ra $t > \sqrt{2}$.

6.11 Phương pháp Newton

Cho phương trình

$$f(x) = 0. \quad (2$$

Các dạng hàm $f(x)$ cho phép ta tìm nghiệm đúng của phương trình (2 rất hạn hẹp. Trong thực tế nói chung ta không hoàn toàn giải được ch xác (2.6).

Có nhiều phương pháp giải gần đúng phương trình. Chương 1 đã trì bày phương pháp chia đôi để tìm nghiệm gần đúng. Trong phần này nghiên cứu phương pháp Newton để tìm nghiệm gần đúng của phương trì Nội dung của phương pháp là thay cung bởi tiếp tuyến tại một đầu mút c cung. Hoành độ giao điểm của tiếp tuyến và trục hoành được xem là nghi gần đúng của phương trình.

- **Điều kiện cho hàm f(x)**

Giả sử hàm $f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$ và trong khoảng (a, b), ta c

i) $f(a), f(b)$ trái dấu (điều này cho phép ta suy ra phương trình (2.6) c nghiệm trong (a, b)).

ii) Tồn tại $f'(x), f''(x)$ và các đạo hàm này giữ nguyên dấu trong $(a,$ (điều kiện này đảm bảo (2.6) chỉ có một nghiệm trong (a, b) và đồ thị (C của hàm $y = f(x)$ luôn lồi hoặc lõm trong (a, b)).

(a, b) gọi là *khoảng phân li nghiệm* của (2.6).

- **Mô tả phương pháp**

Lấy x_1 là a hoặc b tuỳ theo $f(a)$ hay $f(b)$ cùng dấu với $f''(x)$ là nghiệm gần đúng của phương trình. Viết phương trình tiếp tuyến với (C tại $(x_1, f(x_1))$:

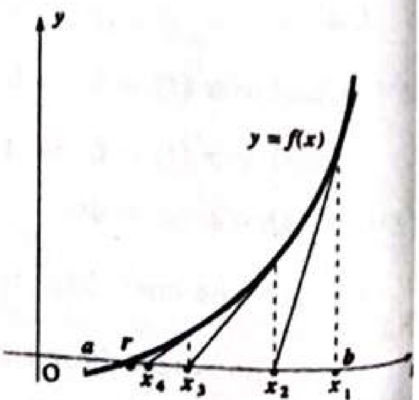
$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

Vì $f'(x_1) \neq 0$ nên tiếp tuyến cắt trục hoành tại điểm $(x_2, 0)$. Ta có

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

Giải ra đối với x_2 ta được

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$



Tương tự, tiếp tuyến với (C) tại $(x_2, f(x_2))$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ :

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Tiếp tục quá trình, ta được dãy lặp $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ với phép lặp

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Quá trình xây dựng sao cho dãy xấp xỉ nghiệm $\{x_n\}_n$ hội tụ về nghiệm đúng r của phương trình. Ta dừng quá trình khi nhận được nghiệm gần đúng đạt độ chính xác theo yêu cầu.

⊙ **Chú ý**

i) $f'(x)$ phải không đổi dấu trong (a, b) vì nếu ngược lại thì các giá trị x_n có thể nằm ngoài (a, b).

ii) Chọn x_1 là a hay b tuỳ theo $f(a)$ hay $f(b)$ cùng dấu với $f''(x)$ để đảm bảo $x_n \to r$. Nếu $f'.f'' < 0$ thì $\{x_n\}_n$ đơn điệu tăng, còn $f'.f'' > 0$ thì $\{x_n\}_n$ đơn điệu giảm.

iii) Đoạn $[a, b]$ được tìm bằng cách dùng đồ thị của hàm $y = f(x)$ hoặc dùng tính chất hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.

iv) Độ chính xác của xấp xỉ nghiệm được xác định như sau :

Nếu $|f'(x)| \geq m > 0$ và $|f''(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$ thì

$$|x_n - r| \leq \frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2.$$

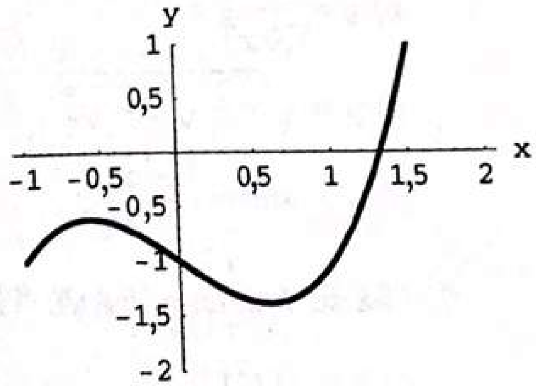
• **Ví dụ 52** Dùng phương pháp Newton, xấp xỉ nghiệm của phương trình

$$x^3 - x - 1 = 0.$$

Giải

Đặt $f(x) = x^3 - x - 1$ thì $f'(x) = 3x^2 - 1$. Ta có phép lặp

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1}. \quad (*)$$



Từ đồ thị của hàm số $f(x)$ ta thấy phương trình có duy nhất nghiệm. Nghiệm này thuộc khoảng $(1, 2)$ vì $f(1) = -1 < 0$ và $f(2) = 5 > 0$. Ta chọn $x_1 = 1,5$ là nghiệm xấp xỉ đầu tiên (cũng có thể chọn $x_1 = 1$ hoặc $x_1 = 2$).

Cho $n = 1$ và thay x_1 vào (*) ta được

$$x_2 = 1,5 - \frac{(1,5)^3 - 1,5 - 1}{3(1,5)^2 - 1} = 1,34782609.$$

(Ta dùng máy tính bỏ túi (calculator) để tính giá trị này đến 8 chữ số sau dấu ,).

Kế tiếp, ta cho $n = 2$ và thay $x_2 = 1,34782609$ vào (*) thì được

$$x_3 = 1,34782609 - \frac{(1.34782609)^3 - (1,34782609) - 1}{3(1,34782609)^2 - 1} = 1,32520040.$$

Tiếp tục quá trình ta được dãy nghiệm xấp xỉ :

$$x_1 = 1,5$$
$$x_2 = 1,34782609$$
$$x_3 = 1,32520040$$
$$x_4 = 1,32471817$$
$$x_5 = 1,32471796$$
$$x_6 = 1,32471796.$$

Tại bước thứ 6 ta không cần tính nữa vì các nghiệm xấp xỉ tiếp theo sẽ cùng giá trị như x_6. Vậy nghiệm xấp xỉ của phương trình là $x \simeq 1,32471796$.

■ Bài tập

1. Tính đạo hàm của các hàm sau :

a) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$;

b) $y = \sin[\cos^2(\tan^3 x)]$;

c) $y = \dfrac{\tan x}{\sqrt[3]{x^2}}$;

d) $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

e) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

f) $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}\right)$;

g) $y = \arcsin \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$;

h) $y = e^{\arctan x}$.

2. Giả sử f là hàm khả vi. Tính đạo hàm của các hàm sau :

a) $y = f(x^2)$;

b) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$;

c) $y = f(e^x).e^{f(x)}$.

3. Tính đạo hàm của các hàm sau :

a) $y = x^{1/x}$; b) $y = x^{x^2}$;

c) $y = x + x^x + x^{x^x}$; d) $y = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

e) $y = (\sin x)^{\tan x}$; f) $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

4. Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$; b) $y = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \left(\dfrac{x}{a}\right)^b$;

c) $y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$.

5. Tính đạo hàm của hàm ẩn xác định bởi phương trình :

a) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$; b) $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

6. Tính đạo hàm của hàm sau tại $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x^2} & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0. \end{cases}$$

7. Tính đạo hàm của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{nếu} \quad x < 1 \\ (1-x)(2-x) & \text{nếu} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

8. Chứng minh hàm số sau có đạo hàm gián đoạn :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0. \end{cases}$$

9. Tìm $f'(a)$ nếu $f(x) = (x-a)\varphi(x)$, trong đó hàm $\varphi(x)$ liên tục tại $x = a$.

10. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $y = \ln \sqrt[3]{1+x^2}$.

11. Tính đạo hàm của các hàm số ở cấp được chỉ ra :

a) $y = (x^2+3)\sqrt{x}$. Tính y''' ; b) $y = x\ln x$. Tính $y^{(n)}$;

c) $y = x^2 e^{ax}$. Tính $y^{(n)}(0)$; d) $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$. Tính $y^{(n)}$.

12. Tìm vi phân của các hàm số sau :

a) $y = x(\ln x - 1)$; b) $y = \dfrac{a}{x} + \arctan\dfrac{x}{a}$.

13. Tính gần đúng các giá trị sau :

a) $\arcsin 0,4983$;
b) $\ln 0,9$;
c) $\cos 41^o$;
d) $\sqrt[4]{15,8}$.

14. Dùng công thức số gia hữu hạn tính gần đúng giá trị $\arcsin 0,54$ chọn $\theta = \dfrac{1}{2}$.

15. Tính :

a) $\dfrac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9)$;
b) $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$;
c) $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$.

16. Tìm a, b để hàm số

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu} \quad x \le 1 \\ ax + b & \text{nếu} \quad x > 1 \end{cases}$ khả vi tại $x = 1$;

b) $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{nếu} \quad x < 0 \\ 2\sin x + 3\cos x & \text{nếu} \quad x \ge 0 \end{cases}$ khả vi tại $x = 0$.

17. Kiểm tra định lí Rolle đối với hàm $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x + 10$ trên đoạn $[-1, 2]$.

18. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$ không thể có quá hai nghiệm thực nếu n chẵn và có không quá ba nghiệm thực nếu n lẻ.

19. Xác định điểm trung gian c trong định lí Lagrange đối với hàm số sau trên đoạn $[0, 2]$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu} \quad x \in [0, 1] \\ 2x - 1 & \text{nếu} \quad x \in (1, 2]. \end{cases}$$

20. Dùng công thức Lagrange chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $|\arctan x - \arctan y| \le |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

b) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1 + x) < x, \forall x > 0$;

c) $\dfrac{x - y}{\cos^2 y} \le \tan x - \tan y < \dfrac{x - y}{\cos x},\ 0 < y < x < \dfrac{\pi}{2}$.

21. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cot x - 1}{x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\tan\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$;

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{xe^{x/2}}{x + e^x}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$;

h) $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x.\ln(x-1)$;

i) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{\ln x}$;

j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$;

k) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi - 2x)^{\cos x}$;

l) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x + e^{2x})^{1/x}$.

22. Chứng tỏ rằng các giới hạn sau :

$(x+2x)^2$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$;

b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$

không thể tính bằng quy tắc L' Hospital. Hãy tính các giới hạn này bằng phương pháp khác.

23. Khai triển Mac Laurin các hàm sau :

a) $f(x) = e^{2x - x^2}$ đến số hạng x^2 ;

b) $f(x) = \ln(\cos x)$ đến số hạng x^6 ;

c) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ đến số hạng x^4 ;

d) $f(x) = \dfrac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$ đến số hạng x^4.

24. Dùng khai triển Mac Laurin, tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$;

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x - x^2\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$.

25. Viết khai triển Taylor của hàm $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ở lân cận $x = 8$ đến số hạng $(x-8)^2$. Áp dụng để tính gần đúng $\sqrt[3]{9}$ và đánh giá sai số.

26. Dùng khai triển Mac Laurin của hàm $f(x) = e^x$ đến số hạng x^3 để tính gần đúng giá trị $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$.

27. Tính gần đúng $\cos 10^o$ chính xác đến 0,001. Chứng tỏ muốn đạt độ chính xác đó chỉ cần dùng công thức Mac Laurin đến bậc 2.

28. Chi phí sản xuất x sản phẩm là $C(x)$ đồng, với

$$C(x) = 8000 + 400x - 0,5x^2.$$

a) Tìm chi phí biên (tốc độ biến thiên của $C(x)$) nếu số sản phẩm là 100.

b) Chứng tỏ rằng chi phí biên trên xấp xỉ bằng hiệu của chi phí sản xuất 101 và 100 sản phẩm.

29. Thể tích của nước trong thùng sau *t phút* kể từ khi nước bắt đầu chảy ra ngoài là $V(t) = 350(20-t)^2$ *lít*.

a) Tìm tốc độ chảy của nước sau 5 *phút*.

b) Tìm tốc độ trung bình của nước chảy ra trong khoảng thời gian từ 5 đến 10 *phút*.

30. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của các hàm sau trên tập được cho :

a) $f(x) = x^2 \ln x$ trên $[1, e]$;

b) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ trên $[-10, 10]$;

c) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ trên $[0, \frac{3}{2}\pi]$.

31. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x}$ trong $(0, +\infty)$.

32. Chứng minh :

a) Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích thì hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

b) Trong tất cả các tam giác cân có cùng chu vi thì tam giác đều có diện tích lớn nhất.

33. Tìm các cạnh của hình chữ nhật có diện tích lớn nhất nội tiếp trong elip $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

34. Một cái hộp có đáy là hình vuông không nắp có thể tích $4\,m^3$. Tìm kích thước của hộp sao cho làm nó tốn ít nguyên liệu nhất.

35. Một sợi dây cứng dài $1\,m$ được cắt thành hai đoạn. Một đoạn cuộn thành hình tròn, đoạn kia cuộn thành hình vuông. Tìm độ dài của mỗi đoạn để tổng diện tích của hình tròn và hình vuông là nhỏ nhất.

36. Người ta muốn kéo một đường dây điện từ vị trí A trên bờ biển đến vị trí B trên một hòn đảo theo phương án như sau : dùng cáp loại I để kéo từ A đến một vị trí C trên bờ, sau đó dùng cáp loại II kéo từ C đến B. Biết khoảng cách giữa B và bờ là là $5km$ và khoảng cách giữa A đến điểm chiếu vuông góc của B trên bờ là $10km$. Giá tiền cáp loại I là $3000\$/km$ và loại II là $5000\$/km$. Hỏi phải chọn C ở đâu để chi phí thấp nhất ?

37. Cửa sổ của người Bắc Âu thường được thiết kế theo dạng hình chữ nhật được phủ lên bởi một nửa hình tròn với đường kính bằng chiều dài của hình chữ nhật. Nếu chu vi của cửa sổ là $4m$ thì kích thước của cửa sổ phải như thế nào để nhận được nhiều ánh sáng nhất?

38. Qua quan sát người ta thấy số lượng vi khuẩn trong một môi trường dinh dưỡng đồng nhất tại thời điểm t là

$$N = 5000(25 + te^{-\frac{t}{20}}).$$

a) Tìm số lượng vi khuẩn nhỏ nhất và lớn nhất trong môi trường đó trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 100$.

b) Tại thời điểm nào trong khoảng đó số lượng vi khuẩn tăng nhanh nhất ?

39. Hai chiếc xe cùng xuất phát từ một địa điểm. Một chiếc chạy về hướng Bắc với tốc độ $60km/$giờ còn một chiếc chạy theo hướng Đông với tốc độ $25km/$giờ. Sau hai giờ thì khoảng cách giữa hai xe tăng theo tốc độ như thế nào ?

40. Tìm tốc độ biến thiên của hình lập phương khi thể tích của nó là $216\,cm^3$ và cạnh của nó đang giảm với tốc độ $2\ cm^3/phút$. Với vận tốc biến thiên như vậy thì hình lập phương sẽ biến mất sau 1 *phút* hay không ? Hãy giải thích.

41. Bột gỗ rơi thành đống ở tốc độ $0{,}5\ m^3/phút$. Nếu đống bột gỗ có dạng hình nón tròn xoay với độ cao bằng đường kính đáy thì độ cao của đống bột gỗ biến thiên như thế nào khi độ cao của đống là $3m$?

▶ Hướng dẫn và đáp số bài tập chương 2

1. a) $y' = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{2x^2\sqrt{x}} + \frac{1}{6x\sqrt[6]{x}}$;

b) $y' = -3\cos\left[\cos^2(\tan^3 x)\right]\sin(2\tan^3 x)\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$;

c) $y' = \frac{3x - \sin 2x}{3x\sqrt[3]{x^2}}\cos^2 x$; d) $y' = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$;

e) $y' = \frac{4\sqrt{x}.\sqrt{x+\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{8\sqrt{x}.\sqrt{x+\sqrt{x}}.\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$; f) $y' = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$;

g) $y' = -\frac{2}{1+x^2}\text{sign}x, |x| \neq 0$; h) $y' = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$.

2. a) $y' = 2xf'(x)$; b) $y' = \sin 2x[f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]$;

c) $y' = e^{f(x)}[e^x f'(e^x) + f'(x)f(e^x)]$.

3. a) $y' = x^{1/x}\frac{1-\ln x}{x^2}$; b) $y' = x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$;

c) $y' = 1 + x^x(\ln x + 1) + x^{x^x}.x^x[(\ln x + 1)\ln x + \frac{1}{x}]$;

d) $y' = (\ln x)^{\frac{1}{x}}\frac{1 - \ln x.\ln(\ln x)}{x^2\ln x}$; e) $y' = (\sin x)^{\tan x}\left[1 + \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}\right]$

f) $(1+\frac{1}{x})^x[\ln(1+\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x})]$.

4. a) $y' = -\frac{(5x^2+14x+5)(x+1)}{(x+2)^4(x+3)^5}$;

b) $y' = \left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b.\left(\ln\frac{a}{b} + \frac{b-a}{x}\right)(x > 0)$;

c) $y' = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} - 2\frac{\ln x}{x}\right)$.

5. a) $y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$; b) $y' = \frac{(2xe^y - 3x^2)y}{1 - x^2ye^y}$.

6. $f'(0) = 0$.

7. $$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 1 \\ 2x - 3 & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$$

8. $$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Vì giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ không tồn tại nên $f'(0)$ gián đoạn tại $x = 0$.

9. $f'(a) = \varphi(a)$.

10. a) $y'' = \dfrac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}$; b) $y'' = \dfrac{2(1-x^2)}{3(1+x^2)^2}$.

11. a) $y''' = \dfrac{3}{8\sqrt{x}}\left(5 + \dfrac{3}{x^2}\right)$; b) $y^{(n)} = (-1)^n\dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}$ $(n \geq 2)$;

c) $y^{(n)}(0) = n(n-1)a^{n-2}$; d) $y' = n!\left[\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}} + \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}\right]$.

12. a) $dy = \ln x dx$; b) $dy = -\dfrac{a^3}{x^2(x^2+a^2)}dx$.

13. a) $\arcsin 0,4983 \simeq 0,5218$; b) $\ln 0,9 \simeq -0,1$; c) $\cos 41^o$;

d) $\sqrt[4]{15,8} \simeq 1,9937$.

14. 0,57043.

15. a) $\dfrac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9) = 1 - 4x^3 - 3x^6$;

b) $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \dfrac{1}{2x^2}\left(\cos x - \dfrac{\sin x}{x}\right)$;

c) $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = -\cot x,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

16. a) $a = 2,\ b = -1$; b) $a = 2,\ b = 3$.

18. Dùng định lí Rolle. Xét đạo hàm của hàm $f(x) = x^n + px + q$.

21. a) 2 ; b) -2 ; c) $-\dfrac{1}{3}$; d) $-\infty$; e) 0 ; f) 0 ; g) $-\dfrac{1}{2}$;

h) 0 ; i) 1 ; j) $\dfrac{1}{e}$; k) 1 ; l) e^2.

22. a) 0 ; b) 1.

23. a) $f(x) = 1 + 2x + x^2 + O(x^2)$; b) $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{45} + O(x^6)$;

c) $f(x) = x - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{11}{6}x^3 - \dfrac{25}{12}x^4 + O(x^4)$;

d) $f(x) = 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + O(x^4)$.

24. a) $-\dfrac{1}{12}$; b) $\dfrac{1}{2}$; c) $\dfrac{1}{3}$.

25. $f(x) \simeq 2 + \frac{1}{3}.\frac{1}{4}(x-8) - \frac{1}{2}.\frac{2}{9}.\frac{1}{32}(x-8)^2$, $\sqrt[3]{9} \simeq 2,0799$.

26. $f(x) \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \simeq 0,78$, $\delta < 0,01$.

27. $\cos 10^o \simeq 0,985$.

28. a) $C'(100) = 300$; b) $C(101) - C(100) = 300 - 0,5 \simeq C'(100)$.

29. a) $V'(5) = -10.500$ *lít/phút* ; b) $V'_{tb} = -8750$ *lít/phút*.

30. a) $f_{\min} = -\frac{1}{2e}$ tại $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ và $f_{\max} = e^2$ tại $x = e$;

b) $f_{\min} = 0$ tại $x = 1$, $x = 2$ và $f_{\max} = 132$ tại $x = 10$;

c) $f_{\min} = -2$ tại $x = \frac{3\pi}{2}$ và $f_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ tại $x = \frac{\pi}{3}$;

31. $f_{\min} = 3$ tại $x = 1$.

33. Hình chữ nhật cần tìm có các cạnh $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

34. Diện tích toàn phần của hộp $S(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ $(x > 0)$.

$S_{\min} = 12$ khi cạnh đáy $x = 2$ và chiều cao $h = 1$, tức là cạnh đáy g[ấp] đôi chiều cao.

35. Tổng diện tích của hai hình là $S(x) = \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \pi + \left(\frac{1-x}{4}\right)^2$ $(0 < x < 1)$.

S đạt min khi độ dài đoạn cuộn thành hình tròn là $\frac{\pi}{\pi+4}$ và độ dài đo[ạn] cuộn thành hình vuông là $\frac{4}{\pi+4}$.

37. Cửa sổ nhận nhiều ánh sáng nhất (diện tích của cửa số lớn nhất) k[hi] chiều rộng bằng bán kính bằng $\frac{4}{\pi+4}$.

38. a) $V_{\min} = 125000$ tại $t = 0$, $V_{\max} = 161788$ tại $t = 20$.

39. Gọi $x(t)$, $y(t)$ là khoảng cách giữa xe chạy về hướng Bắc, hướng Đô[ng] so với vị trí ban đầu tại thời điểm t và $d(t)$ là khoảng cách giữa hai xe t[ại] thời điểm t. Ta có $d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$. Tại thời điểm t_0 đang xét t[hì] $d'(t_0) = 29\sqrt{5}$ $km/$giờ.

40. Tại thời điểm t_0 đang xét thì $V'(t_0) = -216$ $cm^3/phút$, tức là thể tí[ch] của hình lập phương đang giảm với tốc độ 216 $cm^3/phút$. Sau thời điểm n[ày] 1 *phút* thì $V = 0$.

41. Gọi $V(t)$, $h(t)$ là thể tích và chiều cao của đống bột gỗ tại thời điểm t. Ta có $V(t) = \frac{\pi}{3}h^3(t)$. Tại thời điểm t_0 đang xét thì $h'(t_0) = \frac{0,1}{3\pi}$ $m/phút$.

Chương 3

PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

§1. Nguyên hàm và tích phân bất định

1.1 Nguyên hàm

□ **Định nghĩa 1** Hàm $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trong khoảng (a,b) nếu $F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a,b)$.

• **Ví dụ 1**

i) Hàm $F(x) = x^4$ là nguyên hàm của hàm $f(x) = 4x^3$ trên $\mathbb{R}$ vì $(x^4)' = 4x^3, \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Hàm $F(x) = \cos x$ là nguyên hàm của hàm $f(x) = -\sin x$ trên $\mathbb{R}$ vì $(\cos x)' = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.

△ **Định lí 1** *Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trong khoảng (a,b) thì trong (a,b) ta có*

i) $F(x) + C$ (C là hằng số tuỳ ý) cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.

ii) Mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

Chứng minh

i) Vì $(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$ nên $F(x) + C$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

ii) Giả sử $G(x)$ là một nguyên hàm khác của $f(x)$. Ta có

$$[G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Do đó $G(x) - F(x) = C$. Vậy $G(x) = F(x) + C$. ■

◇ **Nhận xét** Từ định lí 1 ta thấy nếu một hàm số có một nguyên hàm thì nó có vô số nguyên hàm và các nguyên hàm sai khác nhau một hằng số cộng.

1.2 Tích phân bất định

a) Khái niệm tích phân bất định

Họ tất cả các nguyên hàm của hàm $f(x)$ được gọi là *tích phân bất định* của $f(x)$, kí hiệu $\int f(x)dx$.

$\int$ gọi là dấu tích phân

$f(x)$ gọi là hàm dưới dấu tích phân

$f(x)dx$ gọi là biểu thức dưới dấu tích phân.

Từ định lí 1 ta suy ra, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$$

trong đó C là một hằng số tuỳ ý.

b) Các tính chất của tích phân bất định

i) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; $\quad d\int f(x)dx = f(x)dx$.

ii) $\int dF(x) = F(x) + C$.

iii) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (k là hằng số).

iv) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

v) Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u)du = F(u) + C$, với $u = u(x)$.

Chứng minh

Giả sử $F'(x) = f(x)$. Ta có

i) $\left(\int f(x)dx\right)' = [F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$. Từ đó suy ra

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx.$$

ii) $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$. ∎

c) Các tích phân cơ bản

i) $\displaystyle\int 0dx = C$;

ii) $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$;

Đặc biệt : $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$; $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;

iii) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

iv) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$;

Đặc biệt : $\int e^x dx = e^x + C$;

v) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

vi) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

vii) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$;

viii) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$;

ix) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$,

x) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

xi) $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$.

- **Ví dụ 2** Tính $I = \int \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$.

Giải

$$I = \int \left(x + 2\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx = \int x dx + 2\int x^{1/6} dx + \int x^{-2/3} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{12}{7} x\sqrt[6]{x} + 3\sqrt[3]{x} + C.$$

- **Ví dụ 3** Tính $I = \int \tan x dx$.

Giải

$$I = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Vậy $\boxed{\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C}$

Tương tự ta có $\boxed{\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C}$

◇ **Nhận xét**

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

Thật vậy, ta có

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Từ đó ta có các tích phân sau :

i) $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$;

ii) $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$;

iii) $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$;

iv) $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$;

v) $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$

• **Ví dụ 4** Tính $I = \int \frac{dx}{a^2 - x^2}$.

Giải

$$I = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right)dx = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{a-x} + \int \frac{dx}{a+x}\right)$$

$$= \frac{1}{2a}(\ln|a+x| - \ln|a-x|) + C.$$

Vậy $\boxed{\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C}$

• **Ví dụ 5** Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a > 0)$.

Giải

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Vậy $\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C}$

Tương tự, ta có $\boxed{\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C}$

d) Các tích phân đặc biệt khác

i) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$;

ii) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C$;

iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C$;

iv) $\int \sqrt{x^2+k}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C$;

v) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

e) Các hàm không có nguyên hàm là hàm sơ cấp

Các hàm sau không có nguyên hàm biểu diễn dưới dạng hàm số sơ cấp :

$y = \frac{\sin x}{x}$, $y = \frac{\cos x}{x}$, $y = \sin x^2$, $y = \cos x^2$, $y = \frac{1}{\ln x}$, $y = \frac{x}{\ln x}$, $y = e^{-x^2}$, ...

1.3 Các phương pháp tính tích phân

a) Đổi biến số

i) ***Đổi biến $t = \varphi(x)$***

Nếu $t = \varphi(x)$ là hàm khả vi thì

$$\boxed{\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt} \tag{3.1}$$

ii) ***Đổi biến $x = \psi(t)$***

Nếu $\psi(t)$ là hàm khả vi, đơn điệu thì

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt} \tag{3.2}$$

Chứng minh

Đạo hàm hai vế của (3.1) theo t ta được

$(\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx)'_t = (\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx)'_x.x'_t = f[\varphi(x)]\varphi'(x).\frac{1}{\varphi'(x)} = f(t)$;

$(\int f(t)dt)' = f(t)$.

Đạo hàm hai vế bằng nhau nên (3.1) được chứng minh. Công thức (3.2) được chứng minh tương tự.

- **Ví dụ 6** Tính $I = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\sqrt{x}\, dx$.

Giải

Đặt $t = \sqrt{x}$ thì $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$. Ta có

$$I = 2\int \sin t dt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

- **Ví dụ 7** Tính $I = \int x^3(x^2+1)^9 dx$.

Giải

Đặt $t = x^2 + 1$ thì $dt = 2xdx$. Khi đó

$$I = \int x^2(x^2+1)^9 xdx = \frac{1}{2}\int (t-1)t^9 dt = \frac{1}{2}\int (t^{10} - t^9)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t^{11}}{11} - \frac{t^{10}}{10}\right) + C = \frac{t^{10}}{2}\left(\frac{t}{11} - \frac{1}{10}\right) + C = \frac{(x^2+1)^{10}}{2}\left(\frac{x^2+1}{11} - \frac{1}{10}\right) + C$$

- **Ví dụ 8** Tính $I = \int \sqrt{1-x^2}dx$.

Giải

Đặt $x = \sin t$ $(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2})$ thì $dx = \cos t dt$. Khi đó

$$I = \int \cos t|\cos t|dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + cos2t}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

b) Tích phân từng phần

Giả sử $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là các hàm có đạo hàm liên tục. Khi đó

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Chứng minh

Ta có $d(uv) = udv + vdu$. Do đó

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu.$$

Vậy $\int udv = uv - \int vdu$. ∎

⊙ **Chú ý**

i) Đối với các tích phân $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arctan x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức, ta đặt $u = \ln x$, $\arctan x$, $\arcsin x$; $dv = P(x)dx$.

ii) Đối với các tích phân $\int P(x).e^x dx$, $\int P(x).\sin x dx$, $\int P(x).\cos x dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức, ta đặt $u = P(x)$; $dv = e^x dx$, $\sin x dx$, $\cos x dx$.

• **Ví dụ 9** Tính $I = \displaystyle\int x\arctan x dx$.

Giải

Đặt $u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$, $dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$.

Khi đó

$$I = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan x + C = \frac{x^2+1}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + C.$$

• **Ví dụ 10** Tính $I = \displaystyle\int x^2 e^x dx$.

Giải

* Đặt $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$. Khi đó

$$I = x^2 e^x - 2\int xe^x dx.$$

* Gọi $J = \displaystyle\int xe^x dx$.

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$,

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x.$

$$J = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Do đó

$$I = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

- **Ví dụ 11** Tính $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$.

Giải

Ta có

$$I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^n}dt$$

$$= \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int t\frac{t}{(t^2+a^2)^n}dt.$$

Xét tích phân $J = \int t\frac{t}{(t^2+a^2)^n}dt$.

Đặt $u = t \Rightarrow du = dt$,

$$dv = \frac{t}{(t^2+a^2)^n}dt \Rightarrow v = -\frac{1}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}.$$

Ta có

$$I_n = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left(-\frac{t}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)a^2(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)a^2}I_{n-1}.$$

Vậy

$$\boxed{I_n = \frac{t}{2(n-1)a^2(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1}}$$

1.4 Tích phân các hàm hữu tỉ

Mọi hàm hữu tỉ $f(x)$ đều có thể viết dưới dạng

$$f(x) = R(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

trong đó $R(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ là các đa thức, bậc của $P(x)$ nhỏ hơn bậc của $Q(x)$ và hệ số của luỹ thừa cao nhất của $Q(x)$ bằng 1.

Khi đó

$$\int f(x)dx = \int R(x)dx + \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

Do đó, để tính tích phân của hàm hửu tỉ ta chỉ cần tính $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

Ta viết $Q(x)$ dưới dạng

$$Q(x) = k(x-a)^{\lambda}\ldots(x^2+px+q)^{\mu},$$

với $p^2 - 4q < 0$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\lambda}{(x-a)^\lambda} + \ldots \\ &+ \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{B_\mu x + C_\mu}{(x^2+px+q)^\mu},\end{aligned}$$

trong đó các hằng số A_i, B_j, C_j được tìm theo phương pháp hệ số bất định. Từ đó ta chỉ cần tính các tích phân dạng

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx \quad \text{và} \quad \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx, \quad p^2-4q<0.$$

Ta có

$$* \int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \begin{cases} A\ln|x-a| + C & \text{nếu} \quad n=1 \\ -\dfrac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C & \text{nếu} \quad n \neq 1. \end{cases}$$

$$* \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+p) + (C - \frac{Bp}{2})}{(x^2+px+q)^n}dx$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} + (C - \frac{Bp}{2})\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{[(x+\frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})]^n}.$$

Tích phân thứ hai có dạng $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ (xem (3.3)).

• **Ví dụ 12** **Tính** $I = \int \frac{1}{x(x-1)^2}dx$.

Giải

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x-1)^2} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}\\ &= \frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx=1 \qquad (i)$$

hay

$$(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A=1 \qquad (ii)$$

* *Cách 1* : Đồng nhất hệ số các lũy thừa cùng bậc ở (ii) ta nhận được

$$\begin{aligned} A+B &= 0\\ -2A-B+C &= 0\\ A &= 1.\end{aligned}$$

Giải hệ trên ta được $A=1, B=-1, C=1$.

* *Cách 2* : Từ (ii), cho

$$\begin{aligned} x=0 \;\Rightarrow\; A &= 1\\ x=1 \;\Rightarrow\; C &= 1\\ x=2 \;\Rightarrow\; A+2B+2C &= 1.\end{aligned}$$

Vậy $A=1, B=-1, C=1$.

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx\\ &= \ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C\\ &= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}+C.\end{aligned}$$

- **Ví dụ 13** **Tính** $\displaystyle\int\frac{1-x^2}{x(x^2+1)^2}dx.$

Giải

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1-x^2}{x(x^2+1)^2} &= \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x}{x(x^2+1)^2}\\ &= \frac{(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A}{x(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A=1-x^2.$$

Đồng nhất hệ số các luỹ thừa cùng bậc ta được

$$A=1,\ B=-1,\ C=0,\ D=-2,\ E=0.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}I &= \int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{x^2+1}-\int\frac{2xdx}{(x^2+1)^2}\\ &= \int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}-\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}\\ &= \ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{x^2+1}+C\\ &= \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{x^2+1}+C.\end{aligned}$$

1.5 Tích phân các hàm vô tỉ

a) Dạng $\displaystyle\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx$

trong đó R là hàm hữu tỉ đối với các biến của nó và m, n, …, r, s là các số nguyên dương.

Gọi k là bội chung nhỏ nhất của các mẫu số $n,\ldots,s$. Đặt

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k,$$

ta đưa tích phân trên về tích phân của hàm hữu tỉ đối với t.

• **Ví dụ 14** Tính $I=\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx.$

Giải

Đặt $t = \sqrt[4]{x}$, $dx = 4t^3dt$. Ta có

$$I = \int \frac{t^2}{t^3+1}4t^3dt = 4\int \frac{t^5dt}{t^3+1} = 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt$$

$$= 4\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}\int \frac{d(t^3+1)}{t^3+1} = \frac{4}{3}(t^3 - \ln|t^3+1|) + C.$$

Vậy $I = \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \ln(\sqrt[4]{x^3}+1)\right)$.

b) Dạng $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, $a \neq 0$

Ta dùng phép thế Euler :

i) Nếu $a > 0$ thì đặt $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t}$. Ta có $x = \dfrac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}t}$.

Phép đổi biến này đưa tích phân về tích phân của hàm hữu tỉ.

ii) Nếu $c > 0$ thì đặt $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}}$. Ta có $x = \dfrac{\pm 2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}$.

iii) Nếu $ax^2+bx+c = 0$ có hai nghiệm thực α, β thì đặt $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = (x -}$

Vì $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2t^2$ nên ta có $x = \dfrac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}$.

• **Ví dụ 15** Tính $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$.

Giải

Đặt $\sqrt{x^2+k} = t - x$. Ta có $x = \dfrac{t^2-k}{2t}$, $dx = \dfrac{t^2+k}{2t^2}dt$ và

$$\sqrt{x^2+k} = t - x = t - \tfrac{t^2-k}{2t} = \tfrac{t^2+k}{2t}.$$

Khi đó

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2+k}| + C.$$

⊙ **Chú ý** Phương pháp Euler khá tổng quát nên thường dẫn đến các tính toán phức tạp. Trong từng trường hợp cụ thể, ta có thể dùng các phép biến đổi thích hợp để tính tích phân dễ dàng hơn.

• **Ví dụ 16** Tính $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Giải

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}|+C.$$

⊙ *Chú ý* Ta có thể tính tích phân $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+cdx})$ bằng cách dùng phép biến đổi lượng giác. Ta phân tích

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2-\tfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Tiếp theo đặt $u=x+\frac{b}{2a}$, ta đưa tích phân về một trong các dạng sau :

(i) $\int R(u,\sqrt{\alpha^2-u^2})du$; (ii) $\int R(u,\sqrt{\alpha^2+u^2})du$; (iii) $\int R(u,\sqrt{u^2-\alpha^2})du.$

Đối với các tích phân trên ta lần lượt thực hiện các phép đổi biến sau :

(i) $u=\alpha\sin t\ (-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2})$; (ii) $u=\alpha\tan t$; (iii) $u=\dfrac{\alpha}{\cos t}$.

c) Dạng $\displaystyle\int \frac{(Ax+B)}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Đối với dạng này, ta đặt $t=\dfrac{1}{x-\alpha}$.

• **Ví dụ 17** Tính $I=\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$.

Giải

Đặt $t=\dfrac{1}{x-1}$. Vì $-1<x<1$ nên $t<0$. Ta có $x=\dfrac{1}{t}+1$, $dx=-\dfrac{dt}{t^2}$.

Khi đó

$$I=-\int \frac{t}{\sqrt{1-(\frac{1}{t}+1)^2}}.\frac{dt}{t^2}=-\int \frac{dt}{t\sqrt{-\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}}}=\int \frac{dt}{\sqrt{-2t-1}}$$

$$=-\sqrt{-2t-1}+C=-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

d) Dạng $\int x^m(a+bx^n)^p$; $m,n,p\in\mathbb{Q}$

Ta có thể đưa tích phân này về tích phân hàm hữu tỉ trong các trường hợp sau :

i) p nguyên : đặt $x = t^s$, với s là mẫu số chung của m, n.

ii) $p = \frac{r}{s}$, $\frac{m+1}{n}$ nguyên : đặt $a + bx^n = t^s$.

iii) $p = \frac{r}{s}$, $\frac{m+1}{n}$ không nguyên nhưng $\frac{m+1}{n} + p$ nguyên : đặt $a + bx^n = t^n x^n$.

- **Ví dụ 18** Tính $I = \int \frac{dx}{x^{2/3}(1 + x^{2/3})}$.

Giải

Ta thấy $m = -2/3, n = 2/3, p = -1$ nên theo trường hợp i) ta đặt $x = t^3$. Ta có

$$I = \int \frac{3t^2 dt}{t^2(1+t^2)} = 3\int \frac{dt}{1+t^2} = 3\arctan t + C = 3\arctan \sqrt[3]{x} + C.$$

- **Ví dụ 19** Tính $I = \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}$.

Giải

Tích phân có thể viết lại $I = \int x(1 + x^{2/3})^{-\frac{1}{2}} dx$.

Ta thấy $m = 1, n = \frac{2}{3}, p = -\frac{1}{2}, \frac{m+1}{n} = 3 \in \mathbb{Z}$ nên theo trường hợp ii) ta đặt $1 + x^{\frac{2}{3}} = t^2$. Ta có

$$x = (t^2-1)^{3/2}, \quad dx = 3t(t^2-1)^{1/2} dt.$$

Khi đó

$$I = 3\int (t^2-1)^2 dt = \frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t + C$$

$$= \frac{3}{5}(1 + x^{2/3})^{5/2} - 2(1 + x^{2/3})^{3/2} + 3(1 + x^{2/3})^{1/2} + C.$$

- **Ví dụ 20** Tính $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Giải

Tích phân có thể viết lại $\int x^{-2}(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$.

Ta thấy $m = -2, n = 2, p = -\frac{3}{2}, \frac{m+1}{n} + p = -2 \in \mathbb{Z}$ nên theo trường hợp iii) ta đặt $1 + x^2 = t^2 x^2$. Từ đó

$$x^2 = \frac{1}{t^2-1}, 2x dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2} dt, dx = -\frac{t}{(t^2-1)^2}\sqrt{t^2-1} dt.$$

Khi đó

$$I = -\int \frac{t^2-1}{t^2}dt = -t - \frac{1}{t} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

1.6 Tích phân các hàm lượng giác

Trong phần này ta tính $I = \int R(\sin x, \cos x)dx$, trong đó $R(u, v)$ là hàm hữu tỉ đối với u, v.

a) Trường hợp tổng quát

Đặt $\boxed{t = \tan \frac{x}{2}}$. Khi đó

$$x = 2\arctan t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

• **Ví dụ 21** Tính $I = \int \frac{dx}{sinx + \cos x + 1}$.

Giải

Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$ thì $x = 2\arctan t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Khi đó

$$I = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} . \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{2t + (1-t^2) + (1+t^2)}$$

$$= \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + C = \ln|\tan\frac{x}{2} + 1| + C.$$

b) Các trường hợp đặc biệt

α) R chẵn, lẻ đối với $\sin x, \cos x$

i) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$: đặt $t = \cos x$.

ii) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$: đặt $t = \sin x$.

iii) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$: đặt $t = \tan x$.

• **Ví dụ 22** Tính $I = \int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$.

Giải

Hàm dưới dấu tích phân lẻ đối với $\sin x$. Đặt $t = \cos x$. Ta có $dt = -\sin x dx$. Từ đó

$$I = -\int \frac{1-t^2}{1+t^2}dt = \int \left(1 - \frac{2}{1+t^2}\right)dt$$
$$= t - 2\arctan t + C = \cos x - 2\arctan(\cos x) + C.$$

- **Ví dụ 23** Tính $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx.$

Giải

Hàm dưới dấu tích phân lẻ đối với $\cos x$ nên ta đặt $t = \sin x$. Ta có $dt = \cos x dx$. Khi đó

$$I = \int \frac{1-t^2}{t}dt = \ln|t| - \frac{t^2}{2} + C = \ln|\sin x| + \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

- **Ví dụ 24** Tính $I = \int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx.$

Giải

Hàm dưới dấu tích phân chẵn đối với $\sin x, \cos x$ nên ta đặt $t = \tan x$. Ta có

$$dx = \frac{dt}{1+t^2},\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Khi đó

$$I = \int \frac{1+\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^2}}\frac{dt}{1+t^2} = \int (2t^2+1)dt$$
$$= \frac{2}{3}t^3 + t + C = \frac{2}{3}\tan^3 x + \tan x + C.$$

β) $R(\sin x, \cos x) = \sin^n x.\cos^m x$

i) Ít nhất một trong hai số m, n lẻ :

Nếu n lẻ thì đặt $t = \sin x$;

Nếu m lẻ thì đặt $t = \cos x$.

ii) m, n đều chẵn và ít nhất một trong hai số âm : đặt $t = \tan x$.

iii) m, n đều chẵn và dương : biến đổi hàm dưới dấu tích phân bằng cách dùng các công thức sau

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

§2. Tích phân xác định

2.1 Bài toán tính diện tích hình thang cong

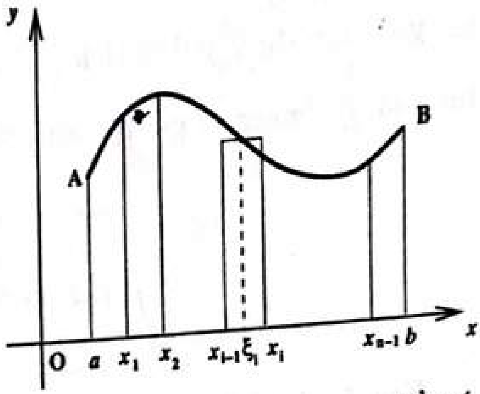
Cho hình thang cong aABb giới hạn bởi trục Ox, các đường thẳng $x = a$, $x = b$ và đường cong $y = f(x)$, trong đó $f(x)$ là hàm đơn trị, liên tục trên $[a, b]$. Hãy tính diện tích của hình thang cong trên.

Giải

Giả sử $f(x) > 0$ với mọi $x \in [a, b]$. Chia tuỳ ý $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Từ các điểm x_i $(i = \overline{1, n-1})$ dựng các đường thẳng song song với trục Oy.



Khi đó hình thang cong aABb được chia thành n hình thang cong nhỏ có diện tích $\triangle S_i$ và đáy $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = \overline{1, n})$.

Trong mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ lấy tuỳ ý điểm ξ_i, $i = \overline{1, n}$ và gọi $y_i = f(\xi_i)$.

Khi $\triangle x_i$ khá bé thì $\triangle S_i$ xấp xỉ với diện tích của hình chữ nhật đáy $\triangle x_i$, chiều cao $f(\xi_i)$, tức là

$$\triangle S_i \simeq f(\xi_i) \triangle x_i.$$

Từ đó

$$dt(aABb) = \sum_{i=1}^{n} \triangle S_i \simeq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \triangle x_i. \quad (*)$$

Nếu tổng (*) dần đến một giới hạn xác định S khi $n \to \infty$ sao cho $\max \triangle x_i \to 0$ thì S được gọi là diện tích của hình thang cong aABb. Vậy

$$\boxed{S = \lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \triangle x_i}$$

2.2 Khái niệm về tích phân xác định

□ **Định nghĩa 2** Cho hàm $f(x)$ xác định trên $[a, b]$.

Chia tuỳ ý $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ và trên mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ lấy tuỳ ý điểm ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Cho số điểm chia tăng vô hạn sao cho $\max \Delta x_i \to 0$. Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} I_n$ không phụ thuộc vào cách chia $[a, b]$ và cách chọn điểm ξ_i thì giới hạn được gọi là tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$, kí hiệu là $\int\limits_a^b f(x)dx$, a gọi là cận dưới, b là cận trên. Ta có

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} f(\xi_i)\Delta x_i}$$

Khi đó $f(x)$ được gọi là khả tích trên đoạn $[a, b]$.

△ Định lí 2

Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nó khả tích trên đoạn này.

⊙ **Chú ý** Định lí trên còn đúng khi $f(x)$ có một số hữu hạn điểm gián đoạn loại một trên đoạn $[a, b]$.

∘ **Nhận xét**

i) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt$.

ii) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

iii) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

• **Ví dụ 25** Tính $I = \int\limits_0^1 x^2 dx$.

Giải

Vì $f(x) = x^2$ liên tục trên $[0, 1]$ nên $f(x)$ khả tích trên $[0, 1]$. Từ đó

$$\int\limits_0^1 x^2 dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i)^2 \Delta x_i.$$

Giới hạn ở vế phải không phụ thuộc vào cách chia $[0,1]$ và cách chọn điểm ξ_i nên ta có thể chia $[0,1]$ thành n đoạn bằng nhau và chọn ξ_i là đầu mút phải của mỗi đoạn, tức là

$$\Delta x_i = \frac{1}{n}, \quad \xi_i = x_i = \frac{i}{n} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ta có $\max \Delta x_i \to 0$ khi và chỉ khi $n \to \infty$. Do đó

$$\begin{aligned}\int_a^b x^2 dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(1 + 2 + \ldots + n^2) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

◇ **Tính chất**

i) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$

ii) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

iii) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

iv) $\int_a^b cdx = c(b-a).$

v) Nếu $f(x) \le g(x)$ với mọi $x \in [a,b]$, $a < b$ thì $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$

vi) Nếu m và M là các giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$ thì

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

vii) (*Định lí giá trị trung bình*) : Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì tồn tại $\xi \in [a,b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

Khi đó

$$f(\xi) = \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

được gọi là giá trị trung bình của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$.

2.3 Công thức Newton-Leibnitz

a) Nhận xét

Nếu hàm $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$ thì $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ là hàm của x trên $[a, b]$.

b) Liên hệ giữa nguyên hàm và tích phân xác định

△ **Định lí 3** (Leibnitz) *Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì hàm $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ có đạo hàm trên $[a, b]$ và có*

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Chứng minh. Lấy $x \in (a, b)$. Cho x một số gia $\triangle x$ sao cho $x + \triangle x \in (a, b)$. Khi đó

$$\triangle\Phi = \Phi(x + \triangle x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\triangle x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$
$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\triangle x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\triangle x} f(t)dt.$$

Theo định lí giá trị trung bình, tồn tại ξ nằm giữa x và $x + \triangle x$ sao cho

$$\int_x^{x+\triangle x} f(t)dt = f(\xi)\triangle x.$$

Từ đó $\triangle\Phi = f(\xi)\triangle x$ hay $\dfrac{\triangle\Phi}{\triangle x} = f(\xi)$.

Cho $\triangle x \to 0$ thì $\xi \to x$. Vì $f(x)$ liên tục tại $x \in (a, b)$ nên $f(\xi) \to f(x)$. Do đó

$$\Phi'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle\Phi}{\triangle x} = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x).$$

Khi $x = a$ hoặc $x = b$, chứng minh tương tự ta cũng có

$$\Phi'_+(a) = f(a)\,; \quad \Phi'_-(b) = f(b).$$

Vậy với mọi $x \in [a, b]$ ta đều có $\Phi'(x) = f(x)$. ■

△ **Hệ quả 1** *Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì hàm $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a, b]$.*

Leibnizt

Newton

△ **Hệ quả 2** *Mọi hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ đều có nguyên hàm trên đoạn đó.*

⋄ **Nhận xét** Từ định lí Leibnitz ta chứng minh được

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = f[\psi(x)]\psi'(x) - f[\varphi(x)]\varphi'(x)}$$

c) Công thức Newton-Leibnitz

△ **Định lí 4** (Công thức Newton-Leibnitz) *Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a, b]$ thì*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \stackrel{kh}{=} F(x)|_a^b \text{ hay } [F(x)]_a^b.$$

Chứng minh

Vì $F(x)$ và $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad \text{với } C \text{ là hằng số.}$$

Cho $x = a$ thì $\Phi(a) = F(a) + C$. Mà $\Phi(a) = \int\limits_a^a f(t)dt = 0$ nên $C = -F(a)$.

Từ đó

$$\Phi(x) = F(x) - F(a).$$

Cho $x = b$ thì ta được

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \Phi(b) = F(b) - F(a).$$

Vậy $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

• **Ví dụ 26** Tính $I = \displaystyle\int_1^e \frac{1+\ln^2 x}{x}dx$.

Giải

$$I = \int_1^e (1+\ln^2 x)d(\ln x) = \left(\ln x + \frac{1}{3}\ln^3 x\right)\Bigg|_1^e = \frac{4}{3}.$$

• **Ví dụ 27** Tính $I = \displaystyle\int_0^2 |1-x|dx$.

Giải

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 |1-x|dx + \int\limits_1^2 |1-x|dx \\ &= \int\limits_0^1 (1-x)dx - \int\limits_1^2 (1-x)dx \\ &= -\tfrac{(1-x)^2}{2}\Big|_0^1 + \tfrac{(1-x)^2}{2}\Big|_1^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

• **Ví dụ 28** Ước lượng tích phân $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^2 x}$.

Giải

Vì $0 \le \cos^2 x \le 1$ nên $5 \le 5 + 3\cos^2 x \le 8$. Từ đó

$$\frac{1}{8} \le \frac{1}{5+3\cos^2 x} \le \frac{1}{5}.$$

Do đó

$$\frac{\pi}{16} \le \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^2 x} \le \frac{\pi}{10}.$$

• **Ví dụ 29** Xét $f(x) = \sin^2 x$. Giá trị trung bình của hàm $f(x)$ trên đoạn $[0, 2\pi]$ là

$$L = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{4\pi}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

• **Ví dụ 30**

i) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \sin^2 t dt = \sin^2 x.$

ii) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^0 \sqrt{1+t^2}dt = -2x\sqrt{1+x^4}.$

iii) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^2 dt = [\cos\pi(\cos^2 x)](-\sin x) - [\cos\pi(\sin^2 x)]\cos x$

$= -\sin x.\cos[\pi(1-\sin^2 x)] - \cos x.\cos(\pi \sin^2 x)$

$= \sin x \cos(\pi\sin^2 x) - \cos x\cos(\pi \sin^2 x)$

$= (\sin x - \cos x)\cos(\pi\sin^2 x).$

- **Ví dụ 31** Tìm $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \cos t^2 dt$

Giải

Giới hạn có dạng vô định $\frac{0}{0}$. Theo quy tắc L'Hospital ta có

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\int_0^x \cos t^2 dt}{1} = \lim_{x\to 0}\cos x^2 = 1.$$

2.4 Các phương pháp tính tích phân xác định

a) Phương pháp đổi biến số

Xét tích phân $\int_a^b f(x)dx$, trong đó $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$.

α) Đổi biến $t = \varphi(x)$

Giả sử

i) Hàm $\varphi(x)$ đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$,

ii) $f(x)dx = g(t)dt$, với $g(t)$ là hàm liên tục trên đoạn $[\varphi(a), \varphi(b)]$.

Khi đó

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt}$$

Chứng minh Giả sử $\int g(t)dt = F(t) + C$. Ta có

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt = F[\varphi(x)] + C.$$

Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = F[\varphi(x)]|_a^b = F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)] = F(t)|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt.$$

⊙ **Chú ý** Khi tính tích phân xác định bằng phương pháp đổi biến, ta khô
trở về biến cũ.

• **Ví dụ 32** Tính $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$.

Giải

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$
$x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t = 1.$

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

β) **Đổi biến $x = \psi(t)$**

Giả sử

i) Hàm $\psi(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$,

ii) $\psi(\alpha) = a$, $\psi(\beta) = b$,

iii) Khi t biến thiên trong $[\alpha, \beta]$ thì x biến thiên trong $[a, b]$.

Khi đó

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\psi(t)]\psi'(t)dt}$$

Chứng minh

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a, b]$. Khi đó $F[\varphi(t)]$ là
nguyên hàm của $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ trên $[\alpha, \beta]$.

Theo công thức Newton-Leibnitz ta có

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a); \tag{3.4}$$

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]|_\alpha^\beta = F[\varphi\beta] - F[\varphi(\alpha)]. \tag{3.5}$$

So sánh (3.4) và (3.5) ta suy ra đẳng thức cần chứng minh. ■

• **Ví dụ 33** Tính $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx \quad (a > 0)$.

Giải

Đặt $x = a\sin t$ $(0 \le t \le \frac{\pi}{2})$ thì $dx = a\cos tdt$.

$x = 0 \Rightarrow t = 0$
$x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Vì $a^2 - x^2 = a^2\cos^2 t$ nên

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} a\cos t.a\cos tdt = a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt \\ &= \frac{a^2}{2}t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{a^2}{4}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}. \end{aligned}$$

• **Ví dụ 34** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[-a, a]$, $(a > 0)$. Chứng minh rằng

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f(x) \text{ lẻ} \\ 2\int_0^a f(x)dx & \text{nếu } f(x) \text{ chẵn.} \end{cases}$$

Giải

Ta có

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx. \tag{3.6}$$

Xét $\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx$.

Đặt $x = -t$. Ta có $dx = -dt$.

$x = -a \Rightarrow t = a$
$x = 0 \Rightarrow t = 0.$

Khi đó

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = -\int\limits_{a}^{0} f(-t)dt = \int\limits_{0}^{a} f(-x)dx.$$

Thay vào (3.6) ta được

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(-x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{nếu } f(x) \text{ lẻ} \\ 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx & \text{nếu } f(x) \text{ chẵn.} \end{cases}$$

* *Áp dụng :* Ta thấy $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^9 x \cos^{11} x dx = 0$ vì hàm dưới dấu tích phân là hàm số lẻ.

• **Ví dụ 35** Chứng minh nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0, 1]$ thì ta có

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} f(\cos x)dx.$$

Giải

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$. Ta có $dx = -dt$.

$x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$
$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0.$

Khi đó

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} f(\sin x)dx = -\int\limits_{\pi/2}^{0} f\left(\sin(\frac{\pi}{2} - t)\right) dt = \int\limits_{0}^{\pi/2} f\left(\sin(\frac{\pi}{2} - t)\right) dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} f(\cos t)dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx.$$

* Áp dụng : Ta có $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx.$

b) Tích phân từng phần

Giả sử $u(x), v(x)$ là các hàm có đạo hàm liên tục. Khi đó ta có

$$\boxed{\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du}$$

Chứng minh

Ta có $d(uv) = vdu + udv$ hay $udv = d(uv) - vdu$. Từ đó

$$\int_a^b udv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b vdu.$$

Vì $\int_a^b d(uv) = uv|_a^b$ nên ta có $\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu.$

- **Ví dụ 36** Tính $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x dx.$

Giải

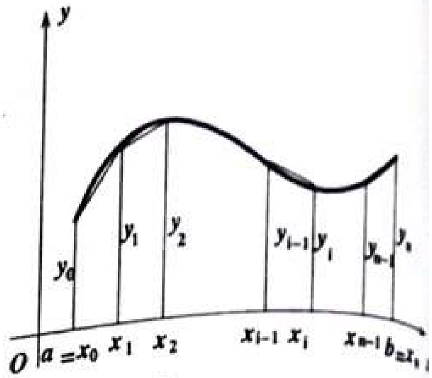
Đặt $u = x$, $du = dx$; $dv = \cos x dx$, $v = \sin x$. Từ đó

$$I = x\sin x|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x|_0^{\pi} = -2.$$

§3. Tính gần đúng tích phân xác định

Tích phân xác định của một hàm trên một đoạn không thể tính được khi ta không xác định được biểu thức dạng hiện của hàm hoặc ta không tìm được nguyên hàm của hàm. Gặp tình huống này ta phải dùng phương pháp tính gần đúng tích phân.

3.1 Công thức hình thang



Giả sử ta cần tính $\int_a^b f(x)dx$, trong đó $f(x) \geq 0$ và liên tục trên $[a, b]$ $(a < b)$.

Chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau bởi các điểm chia :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Đặt $h = \frac{b-a}{n}$. Ta có $x_i = x_0 + ih$, $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Thay mỗi hình thang cong nhỏ giới hạn bởi cung $y = f(x)$, trục Ox và các đường $x = x_{i-1}$, $x = x_i$ bởi hình thang có chiều cao là $h = \frac{b-a}{n}$ và hai đáy là $y_{i-1} = f(x_{i-1})$, $y_i = f(x_i)$, ta được công thức gần đúng sau :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

$$\simeq \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$$

hay

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \tag{3.7}$$

Khi $f(x) < 0$ thì công thức (3.7) vẫn đúng.

⊙ **Chú ý** Người ta chứng minh được rằng khi $f(x)$ có đạo hàm cấp hai bị chặn và nếu dùng công thức (3.7) để tính gần đúng tích phân $\int_a^b f(x)dx$ thì sai số phạm phải là :

$$\delta(n) \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}M,$$

trong đó $|f''(x)| \leq M$ với mọi $x \in [a, b]$.

• **Ví dụ 37** Dùng công thức hình thang tính gần đúng tích phân $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ với $n = 5$.

Giải Ta có $h = \frac{1-0}{5} = 0,2$ và

$x_0 = 0$	$y_0 = f(0) = 1,0000$
$x_1 = 0,2$	$y_1 = f(0,2) = 0,9615$
$x_2 = 0,4$	$y_2 = f(0,4) = 0,8621$
$x_3 = 0,6$	$y_3 = f(0,6) = 0,7353$
$x_4 = 0,8$	$y_4 = f(0,8) = 0,6098$
$x_5 = 1$	$y_5 = 0,5$

Khi đó

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \simeq 0,2.[\frac{1}{2}.1 + 0,9615 + 0,8621 + 0,7353 + 0,6098 + \frac{1}{2}.0,5]$$
$$\simeq 0,784.$$

Ví dụ 38 Giả sử ta có bảng giá trị của hàm $f(x)$ với $1 \le x \le 3$ cho bởi

x	1	1,25	1,50	1,75	2	2,25	2,50	2,75	3
$f(x)$	0,6	0,8	1,12	1,8	1,4	1,4	1	0,4	0,2

Tính $\int_1^3 f(x)dx$ bằng công thức hình thang.

Giải

Ta có $h = 0,25$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1,25$,..., $x_8 = 3$ và $y_0 = 0,6$, $y_1 = 0,8$,..., $y_8 = 0,2$. Áp dụng công thức hình thang ta được

$$\int_1^3 f(x)dx \simeq 0,25.[\tfrac{1}{2}.0,6 + 0,8 + 1,12 + 1,8 + 1,4 + 1,4 + 1 + 0,4 + \tfrac{1}{2}.0,2]$$
$$\simeq 2{,}08.$$

3.2 Công thức Simpson

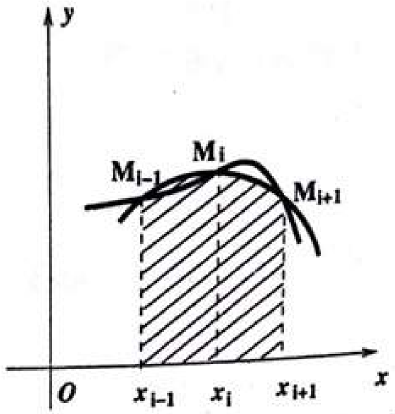
Giả sử ta cần tính $\int_a^b f(x)dx$, trong đó $f(x)$ không âm và liên tục trên đoạn $[a,b]$.

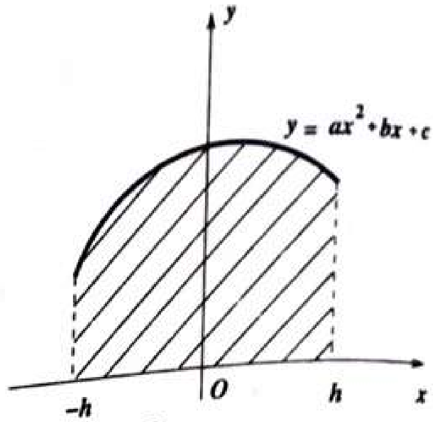
Chia đoạn $[a,b]$ thành $2n$ đoạn bằng nhau bởi các điểm chia

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} = b.$$

Đặt $h = \frac{b-a}{2n}$, ta có $x_i = x_0 + ih$, $y_i = f(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$.

Thay mỗi cặp hình thang cong nhỏ liên tiếp giới hạn bởi cung $y = f(x)$, trục Ox, các đường $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ bởi hình thang cong giới hạn bởi trục Ox, các đường $x = x_{i-1}$, $x = x_{i+1}$ và cung parabol đi qua 3 điểm $M_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$, $M_i(x_i, y_i)$, $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ có trục song song với Oy và có phương trình $y = ax^2 + bx + c$. Khi đó có thể xấp xỉ $\int_a^b f(x)dx$ bởi diện tích của n hình thang parabol trên.





Do phép tịnh tiến không làm thay đổi diện tích của một hình nên để việc tính toán được đơn giản ta tính diện tích S của hình thang parabol giới hạn bởi các đường $x = -h$, $x = h$, $y = 0$ và $y = ax^2 + bx + c$. Đặt

$$y_- = y(-h) = ah^2 - bh + c,$$

$$y_0 = y(0) = c,$$

$$y_+ = y(h) = ah^2 + bh + c.$$

Ta có

$$\begin{aligned} S &= \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)dx = \left(a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right)\Big|_{-h}^{h} \\ &= \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3}\left[(ah^2 - bh + c) + 4c + (ah^2 + bh + c)\right] \end{aligned}$$

nên

$$S = \frac{h}{3}(y_- + 4y_0 + y_+).$$

Do đó

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{3}\left[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \right. \\ &\quad \left. + \ldots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})\right] \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + \right. \\ &\quad \left. + \ 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})\right]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Khi $f(x) < 0$ thì công thức (3.8) vẫn đúng.

⊙ **Chú ý** **Người ta chứng minh được rằng khi $f(x)$ có đạo hàm cấp 4 bị chặn và nếu dùng công thức (3.8) để tính gần đúng thì sai số phạm phải là**

$$\delta(2n) \leq \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}M$$

trong đó $|f^{(4)}(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$.

Ví dụ 39 Tính gần đúng tích phân $\int\limits_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ bằng cách dùng công thức Simpson với $n = 10$.

Giải

Chia đoạn $[1,2]$ thành 10 phần bằng nhau. Ta có $h = \dfrac{2-1}{3.10} = \dfrac{1}{30}$ và x_i, $y_i = \dfrac{1}{x_i}$ xác định từ bảng sau :

$x_0 = 1,0$	$y_0 = 1,00000$
$x_1 = 1,1$	$y_1 = 0,90909$
$x_2 = 1,2$	$y_2 = 0,83333$
$x_3 = 1,3$	$y_3 = 0,76923$
$x_4 = 1,4$	$y_4 = 0,71428$
$x_5 = 1,5$	$y_5 = 0,66666$
$x_6 = 1,6$	$y_6 = 0,62500$
$x_7 = 1,7$	$y_7 = 0,58823$
$x_8 = 1,8$	$y_8 = 0,55555$
$x_9 = 1,9$	$y_9 = 0,52631$
$x_{10} = 2,0$	$y_{10} = 0,5000$

Theo công thức Simpson ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_1^2 \tfrac{1}{x}\,dx &\simeq \left(\tfrac{1}{30}\right)[y_0 + y_{10} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_9) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_8)]\\ &\simeq \left(\tfrac{1}{30}\right)(1,0 + 0,5 + 4\,.\,3,45952 + 2\,.\,2,72816) = 0,69315.\end{aligned}$$

§4. Tích phân suy rộng

4.1 Tích phân với cận vô tận (loại 1)

a) Khoảng lấy tích phân dạng $[a, +\infty)$

□ **Định nghĩa 3** Cho hàm $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a,b]$ với mọi số hữu hạn $b > a$.

Giới hạn $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ (*) được gọi là tích phân suy rộng của $f(x)$ trên

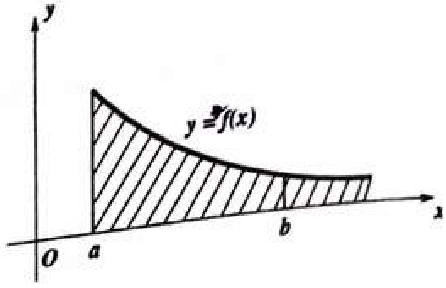
$[a, +\infty)$, kí hiệu là $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Như vậy

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Nếu giới hạn (*) tồn tại và hữu hạn thì ta nói tích phân suy rộng hội tụ. Nếu giới hạn (*) bằng ∞ hay không tồn tại thì ta nói tích phân suy rộng phân kì.

▷ **Ý nghĩa hình học**

Tích phân suy rộng $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ biểu thị diện tích hình thang cong vô hạn.



• **Ví dụ 40** Xét tính hội tụ của tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$.

Giải

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1.$$

Vậy tích phân hội tụ và $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1$.

• **Ví dụ 41** Xét tính hội tụ của tích phân $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx$.

Giải

Ta có $\int\limits_0^b \cos x dx = \sin x|_0^b = \sin b$.

Vì giới hạn $\lim\limits_{b\to+\infty} \sin b$ không tồn tại nên tích phân $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx$ phân kì.

• **Ví dụ 42** Xét tính hội tụ của tích phân $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ với $a > 0, \alpha > 0$.

Giải

• Khi $\alpha = 1$:

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln|x|\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} [\ln b - \ln a] = +\infty.$$

Do đó tích phân $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x}$ phân kì.

* Khi $\alpha \neq 1$:

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to+\infty}x^{1-\alpha}\Big|_a^b=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to+\infty}(b^{1-\alpha}-a^{1-\alpha})$$

$$=\begin{cases}+\infty & \text{khi} \quad \alpha<1\\ \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{khi} \quad \alpha>1.\end{cases}$$

Vậy

$$\boxed{\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} : \begin{cases}\text{hội tụ} & \text{khi} \quad \alpha>1\\ \text{phân kì} & \text{khi} \quad 0<\alpha\leq 1\end{cases}}$$

b) Khoảng lấy tích phân dạng $(-\infty, a]$

Nếu $f(x)$ xác định trên $(-\infty, a]$ thì ta định nghĩa

$$\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx=\lim_{c\to-\infty}\int\limits_c^a f(x)dx.$$

c) Khoảng lấy tích phân dạng $(-\infty, +\infty)$

Nếu $f(x)$ xác định trên $(-\infty, +\infty)$ thì ta định nghĩa

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx+\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \quad (-\infty<a<\infty).$$

Trong định nghĩa trên, tích phân vế trái hội tụ khi và chỉ khi cả hai tích phân vế phải hội tụ và nếu tích phân vế trái tồn tại thì nó không phụ thuộc vào việc chọn số a.

• **Ví dụ 43** Xét sự hội tụ của các tích phân $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$, $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Giải

• $\lim\limits_{c\to-\infty}\int\limits_c^0\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{c\to-\infty}\arctan x\Big|_c^0=-\lim\limits_{c\to-\infty}\arctan c=-\dfrac{\pi}{2}.$

Do đó tích phân $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$ hội tụ và $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{2}$.

* $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \arctan x|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}$.

Do đó tích phân $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ hội tụ và $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

4.2 Tích phân của hàm không bị chặn (loại 2)

□ **Định nghĩa 4**

* Cho hàm $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b-\varepsilon]$, với mọi $\varepsilon > 0$ bé tuỳ ý và $f(x)$ không bị chặn khi $x \to b^-$.

Giới hạn $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ (**) được gọi là tích phân suy rộng của $f(x)$ trên $[a, b)$, kí hiệu là $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$. Như vậy

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Nếu giới hạn (**) tồn tại và hữu hạn thì ta nói tích phân suy rộng hội tụ. Nếu giới hạn (**) bằng ∞ hoặc không tồn tại thì ta nói tích phân suy rộng phân kì.

* Nếu $f(x)$ khả tích trên mọi đoạn $[a+\varepsilon, b]$, với mọi $\varepsilon > 0$ và không bị chặn khi $x \to a^+$ thì ta định nghĩa tích phân suy rộng của $f(x)$ trên $(a, b]$:

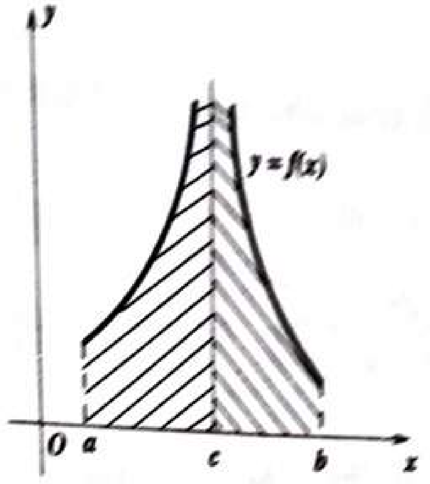
$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

* Nếu $f(x)$ không bị chặn khi $x \to c \in (a, b)$ thì ta định nghĩa :

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

• **Ý nghĩa hình học**

Nếu $f(x)$ không bị chặn khi $x \to c \in (a, b)$ thì tích phân $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ biểu thị diện tích hình thang cong vô hạn.



Chú ý Nếu $f(x)$ có điểm gián đoạn vô cực tại $x = a$ (hay $x = b$), hàm $F(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a, b]$ (hay $[a, b)$) thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ngoài ra, công thức trên còn đúng khi $f(x)$ có một số điểm gián đoạn vô cực trên $[a, b]$ và nguyên hàm $F(x)$ liên tục trên $[a, b]$.

• **Ví dụ 44** Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Giải

Hàm dưới dấu tích phân không bị chặn khi $x \to 1^-$ hoặc $x \to 1^+$. Ta có

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \arcsin x|_{-1+\varepsilon}^{0} = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \arcsin(-1+\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Tương tự

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \arcsin x|_0^{1-\varepsilon} = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy tích phân I hội tụ và có

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

• **Ví dụ 45** Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ $(a < b, \alpha > 0)$.

Hàm dưới dấu tích phân không bị chặn khi $x \to a^+$.

* Khi $\alpha = 1$:

$$I_1 = \int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln|x-a|\Big|_{a+\varepsilon}^b$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\ln|b-a| - \ln \varepsilon] = +\infty.$$

* Khi $\alpha \neq 1$:

$$I_\alpha = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{1-\alpha}(x-a)^{1-\alpha}\Big|_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{1-\alpha}[(b-a)^{1-\alpha} -$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{khi} \quad \alpha < 1 \\ +\infty & \text{khi} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

Vậy

$$\boxed{\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} : \begin{cases} \text{hội tụ} & \text{khi} \quad 0 < \alpha < 1 \\ \text{phân kì} & \text{khi} \quad \alpha \geq 1 \end{cases}}$$

4.3 Tiêu chuẩn hội tụ và phân kì của tích phân suy rộng

a) Dạng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

α) *Trường hợp $f(x) \geq 0$*

△ Định lí 5 *Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$ $(a \leq b)$ với b lớn tuỳ ý và $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \geq a$. Khi đó*

i) Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

ii) Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kì.

△ Định lí 6 *Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm không âm, khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$ $(a \leq b)$ với b lớn tuỳ ý.*

Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \ (0 < k < +\infty)$ *thì các tích phân suy rộng* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *và* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.*

β) Trường hợp $f(x)$ có dấu tuỳ ý

Δ Định lí 7

Nếu $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *hội tụ thì* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ. Khi đó* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *được gọi là hội tụ tuyệt đối.*

Nếu $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ mà $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kì thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là bán hội tụ.

b) Dạng $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ **hoặc** $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ **với** $f(x) \to \infty$ **khi** $x \to a$ **(hay** $x \to b$**)**

Đối với các tích phân suy rộng trên ta có các tiêu chuẩn hội tụ hoặc phân kì tương tự.

⊙ **Chú ý** Ta thường so sánh tích phân suy rộng của hàm $f(x)$ với các tích phân suy rộng sau

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int\limits_{-\infty}^{a} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int\limits_a^{b} \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad \int\limits_a^{b} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}.$$

• **Ví dụ 46** Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Giải

Ta có $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}} < \dfrac{1}{x^2}, \forall x \geq 1.$

Vì tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ hội tụ $(\alpha = 2 > 1)$ nên tích phân I hội tụ.

• **Ví dụ 47** Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}dx$.

Giải

Ta có $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x} > \dfrac{\sqrt{x}}{x+x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^{1/2}}, \forall x > 1.$

Vì tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}}$ phân kì ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$) nên tích phân I phân kì.

- **Ví dụ 48** Xét sự hội tụ của tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx.$

Giải

Ta thấy $\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{1-x^2}} \to \infty$ khi $x \to 1^-$.

Xét tích phân $J = \displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\cos x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\right| dx$. Ta có $\left|\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\right| = \left|\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\right|$

và

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{\left|\frac{\cos x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\right|}{\left|\frac{\cancel{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x}}\right|} \right) = \frac{|\cos 1|}{\sqrt[3]{2}}.$$

$\hookrightarrow \left|\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\right|$

Vì tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ hội tụ ($\alpha = \frac{1}{3}$) nên tích phân J hội tụ. Vậy tích phân I hội tụ tuyệt đối.

- **Ví dụ 49** Xét sự hội tụ của tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$

Giải

Vì $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \le \dfrac{1}{x^2}, \forall x \ge 1$ và tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ ($\alpha = 2 > 1$) nên tích phân đã cho hội tụ tuyệt đối.

- **Ví dụ 50** Xét sự hội tụ của tích phân $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$

Giải

Đặt $u = \dfrac{1}{x} \Rightarrow du = -\dfrac{dx}{x^2}, dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$. Từ đó

$$\int_1^b \frac{\sin x}{x} dx = -\left.\frac{\cos x}{x}\right|_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Cho $b \to +\infty$ thì $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\cos 1 - \dfrac{\cos b}{b}\right) = \cos 1$ và

$\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \dfrac{\cos x}{x^2}dx = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^2}dx$ hội tụ (theo ví dụ trên). Do đó tích phân đã cho hội tụ.

Ta sẽ chỉ ra tích phân này bán hội tụ, tức là $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx$ phân kì.

Vì $|\sin x| \geq \sin^2 x$ nên ta sẽ chứng minh tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ phân kì.

Ta có

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x}dx$$

hay

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = 2\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}dx.$$

Nếu tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x}dx$ hội tụ thì tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x}$ phải hội tụ. Điều này vô lí vì tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x}$ phân kì.

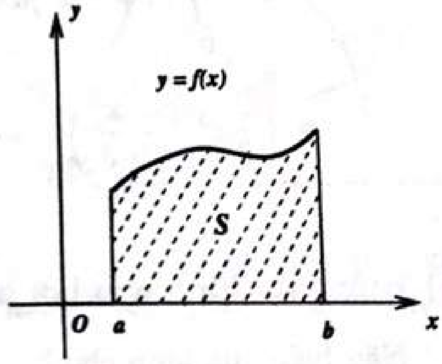
§5. Ứng dụng của tích phân xác định

5.1 Diện tích hình phẳng

a) Biên của hình cho trong hệ toạ độ Descartes

i) Nếu hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, trong đó $y = f(x)$ là hàm liên tục, không âm trên đoạn $[a, b]$, trục Ox, và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ thì diện tích S của hình cho bởi

$$\boxed{S = \int\limits_a^b f(x)dx}$$

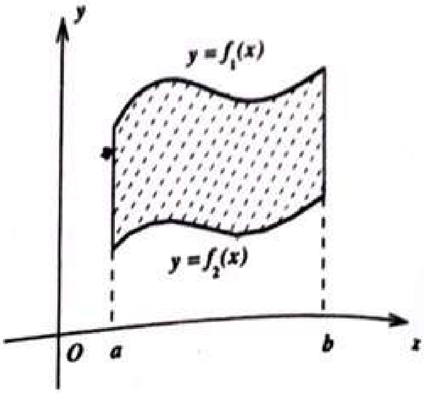


Nếu $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in [a, b]$ thì $S = -\int\limits_a^b f(x)dx$. Do đó trong trường hợp tổng quát ta có

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x)|dx}$$

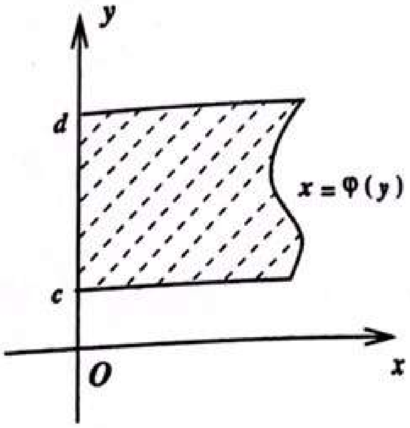
ii) Trường hợp hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong liên tục $y = f_1(x), y = f_2(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ thì diện tích S cho bởi

$$\boxed{S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx}$$



iii) Nếu hình phẳng giới hạn bởi đường cong $x = \varphi(y)$, trong đó $\varphi(y)$ là hàm liên tục trên $[c, d]$, trục Oy và các đường thẳng $y = c, y = d$ thì diện tích của hình được tính theo công thức

$$\boxed{S = \int_c^d |\varphi(y)|dy}$$

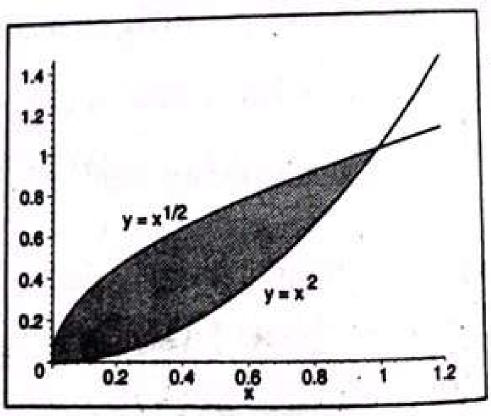


• **Ví dụ 51** Tính diện tích của hình giới hạn bởi hai parabol $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$.

Giải

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$



b) Biên của hình cho bởi phương trình tham số

Nếu biên của hình cho bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

với $\alpha \le t \le \beta, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, trong đó các hàm $\varphi(t), \psi(t), \varphi'(t)$ liên tục trên $[\alpha, \beta]$ thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong đó, trục Ox và các đường thẳng $x = a, x = b$ được cho bởi công thức

$$\boxed{S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)|\varphi'(t)dt}$$

Ví dụ 52 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi một cung xycloide

$$\begin{cases} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{cases}$$

và trục Ox.

Giải

Ta có $\psi(t) = a(1 - \cos t), \varphi'(t) = a(1 - \cos t)$.

$$S = \int\limits_0^{2\pi} |a(1 - cost)|a(1 - \cos t)dt = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt$$

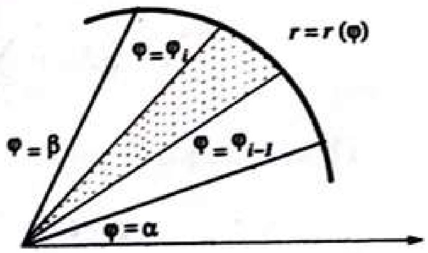
$$= a^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

c) Biên của hình cho trong toạ độ cực

Cho hình phẳng D giới hạn bởi hai tia $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ và cung của đường cong $r = r(\varphi)$, trong đó $r(\varphi)$ là hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$.

Chia D thành n hình quạt cong nhỏ bởi các tia $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$.



Hình quạt cong con D_i nằm giữa hai tia φ_{i-1} và φ_i có diện tích xấp xỉ diện tích hình quạt bán kính $r(\xi_i)$ với $\varphi_{i-1} \le \xi_i \le \varphi_i$. Từ đó ta có $S(D_i) \simeq \frac{1}{2}r^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$. Do đó

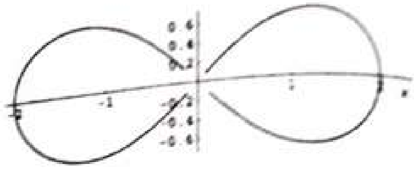
$$S \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\xi_i) \triangle \varphi_i.$$

Tổng trên là tổng tích phân của hàm $\frac{1}{2} r^2(\varphi)$ trên đoạn $[\alpha, \beta]$. Cho qua giới hạn ta được diện tích của hình cho bởi

$$\boxed{S = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi}$$

• **Ví dụ 53** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường Lemniscat $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Giải



Vì tính đối xứng của đường Lemniscat nên ta chỉ cần tính $\frac{1}{4}$ diện tích của hình. Ta có

$$S = 4.\frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2 \left. \frac{\sin 2\varphi}{2} \right|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

5.2 Độ dài đường cong phẳng

a) Đường cong trong hệ toạ độ Descartes

Cho cung đường cong $\widehat{AB}$ có phương trình $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$, trong đó $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$. Chia cung $\widehat{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm chia $A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$. Mỗi phép chia cung như vậy ứng với phép phân hoạch của đoạn $[a, b]$ với x_i là hoành độ của điểm M_i.

Độ dài đường gấp khúc $M_0 M_1 \ldots M_n$ là một giá trị xấp xỉ của độ dài s của cung $\widehat{AB}$:

$$s \simeq \sum_{i=1}^{n} M_{i-1} M_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

Theo định lí Lagrange, tồn tại $c \in (x_{i-1}, x_i)$ sao cho

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Do đó

$$s \simeq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(c_i)}(x_i - x_{i-1}).$$

Vì vậy

$$s = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(c_i)} \Delta x_i.$$

Giới hạn tồn tại vì $f'(x)$ liên tục tại mọi $x \in [a, b]$ và nó là giới hạn của tổng tích phân của hàm $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ trên $[a, b]$. Vậy cung $\overset{\frown}{AB}$ có độ dài s cho bởi

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx}$$

Ví dụ 54 Tính độ dài cung đường cong $y = x^{3/2}, x \in [0, 1]$.

Giải

Ta có $y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$, $1 + y'^2 = 1 + \frac{9}{4}x$. Do đó độ dài cung đường cong là

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{4 + 9x} dx = \frac{1}{18}\int_0^1 (4 + 9x)^{1/2} d(4 + 9x)$$

$$= \frac{1}{27}(4 + 9x)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8).$$

⊙ **Chú ý** Cho cung $\overset{\frown}{AM}$ có phương trình $y = f(x)$, trong đó $A(a, f(a))$ là điểm cố định và $M(x, f(x))$ là điểm tuỳ ý. Khi đó độ dài của cung $\overset{\frown}{AM}$ là

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Đạo hàm theo cận trên ta được $s'(x) = \sqrt{1 + f'^2(x)}$.

Ta có công thức vi phân cung $\boxed{ds = \sqrt{1 + f'^2(x)} dx}$.

b) Đường cong cho bởi phương trình tham số

Giả sử cung đường cong $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình tham số

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta,$$

trong đó $\varphi(t), \psi(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$.

Ta có $dx = \varphi'(t)dt$ và $y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Do đó độ dài của cung $\widehat{AB}$ là $s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \frac{\psi'^2(t)}{\varphi'^2(t)}}\varphi'(t)dt$ hay

$$\boxed{s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt}$$

Tương tự như trong toạ độ Descartes ta có công thức vi phân cung

$$ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.$$

- **Ví dụ 55** Tính độ dài đường cycloide

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Giải

Ta có

$$s = \int\limits_0^{2\pi} a\sqrt{(1 - cost)^2 + \sin^2 t}dt = 2a\int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = 8a.$$

c) Đường cong cho trong hệ toạ độ cực

Giả sử cung đường cong được cho bởi phương trình trong hệ tọa độ cực

$$r = r(\varphi),\quad \alpha \le \varphi \le \beta,$$

trong đó $r(\varphi)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$.

Ta dùng công thức

$$x = r(\varphi)\cos\varphi,\ y = r(\varphi)\sin\varphi$$

và xem x, y biểu diễn theo tham số φ, ta được

$$\begin{aligned} x'(\varphi) &= r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi \\ y'(\varphi) &= r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi. \end{aligned}$$

Do đó

$$x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) = r^2(\varphi) + r'^2(\varphi).$$

Khi đó độ dài của cung đường cong cho bởi

$$\boxed{s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi}$$

- **Ví dụ 56** Tính độ dài đường Cardioid $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(a > 0)$.

Giải

Ta có $r' = -a\sin\varphi$. Vì đường đối xứng qua trục cực nên

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi$$

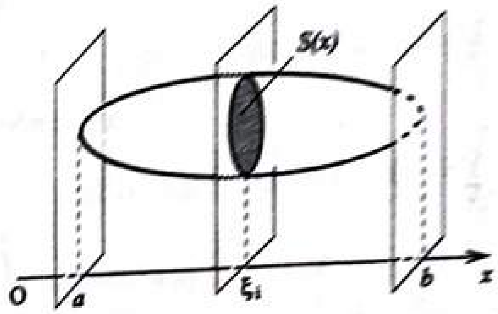
$$= 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

5.3 Thể tích của vật thể

a) Vật thể bất kì

Cho một vật thể giới hạn bởi một mặt cong kín và hai mặt phẳng $x = a, x = b$ $(a < b)$.

Giả sử mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm tuỳ ý $x \in [a, b]$ cắt vật thể theo một thiết diện có diện tích $S = S(x)$ và $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$.



Chia $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$

Qua mỗi điểm đó dựng một mặt phẳng vuông góc với trục Ox, các mặt phẳng đó chia vật thể thành n vật thể nhỏ.

Trên mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ lấy một điểm ξ_i tuỳ ý. Dựng hình trụ đứng giới hạn bởi các mặt phẳng $x = x_{i-1}$, $x = x_i$ và mặt trụ có đường sinh song song với Ox và đi qua biên của thiết diện tạo bởi vật thể và mặt phẳng $x = \xi_i$. Thể tích của hình trụ đó là $S(\xi_i)\Delta x_i$, với $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Thể tích của hình trụ ứng với mọi i là

$$\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i. \tag{3.9}$$

Giới hạn của (3.9) khi $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta x_i \to 0$ gọi là thể tích của vật thể đã cho.

Theo định nghĩa tích phân xác định, giới hạn trên là $\int_a^b S(x)dx$. Tích phân tồn tại vì $S(x)$ liên tục trên a, b.

Gọi V là thể tích của vật thể thì

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx} \tag{3.10}$$

• **Ví dụ 57** Tính thể tích của ellipsoid $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Giải :

Cắt ellipsoid bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x \in [-a, a]$. Thiết diện thu được là hình ellip

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} \le 1.$$

Diện tích của thiết diện

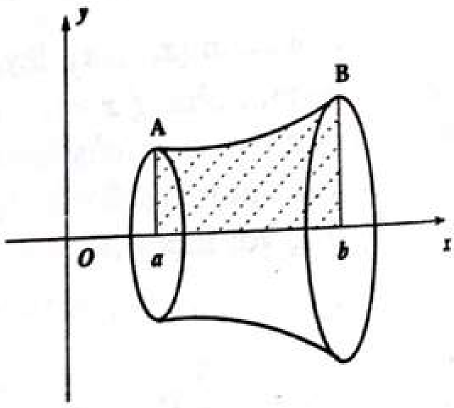
$$S(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Vậy thể tích của ellipsoid là

$$V = \int_{-a}^{a} S(x)dx = \pi bc\int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

b) Vật thể tròn xoay

Cho hình phẳng aABb giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Ta tìm thể tích của vật thể tròn xoay tạo nên khi quay hình phẳng này quanh trục Ox.



Giả sử hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$.

Mọi thiết diện vuông góc với trục Ox tại $x \in [a, b]$ đều là hình tròn có tâm trên Ox và có bán kính là $y = f(x)$. Diện tích của thiết diện là

$$S(x) = \pi f^2(x).$$

Do đó theo (3.10) ta có công thức tính thể tích của vật thể tròn xoay

$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx}$$

Ngoài ra, người ta chứng minh được rằng thể tích của vật thể tròn xoay tạo nên khi quay hình phẳng aABb quanh trục Oy cho bởi công thức

$$\boxed{V_y = 2\pi \int_a^b x.f(x)dx}$$

Ví dụ 58 Tính thể tích của vật thể tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và $y = 0$ khi quay hình quanh trục Ox, Oy.

Giải

Các đường $y = 2x - x^2$ và $y = 0$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x = 0$ và $x = 2$. Ta có

$$V_x = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{16}{15}\pi \; ; \quad V_y = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2)dx = \frac{8}{3}\pi.$$

5.4 Diện tích mặt tròn xoay

Cho cung đường cong $\widehat{AB}$ có phương trình $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$, trong đó $f(x)$ không âm và có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$. Hãy tính diện tích S của mặt tròn xoay tạo nên khi quay cung $\widehat{AB}$ quanh trục Ox.

Chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Khi đó các điểm $M_i(x_i, f(x_i))$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ chia cung $\widehat{AB}$ thành n cung nhỏ. Nếu $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ khá bé, có thể xem diện tích của mặt tròn xoay do quay cung $\widehat{M_{i-1}M_i}$ quanh trục Ox xấp xỉ bằng diện tích của mặt nón cụt do quay dây cung $M_{i-1}M_i$ quanh trục Ox, tức là xấp xỉ bằng

$$\pi M_{i-1}M_i[f(x_{i-1}) + f(x_i)],$$

trong đó $M_{i-1}M_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i,\;\; x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i.$

Do đó $S \simeq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \pi\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}[f(x_{i-1} + f(x_i))]\Delta x_i.$

Khi $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta x_i \to 0$ thì tổng trên dần tới

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

Vậy $S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$

Nếu $f(x)$ có dấu bất kì và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì

$$\boxed{S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'^2}dx}.$$

• **Ví dụ 59** Tính diện tích của mặt xuyến do đường tròn $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(0<a<b)$ quay quanh trục Ox tạo thành.

Giải

Nửa trên đường tròn có phương trình $y = b+\sqrt{a^2-x^2}$, nửa dưới có phương trình $y = b-\sqrt{a^2-x^2}$, $x\in[-a,a]$. Mặt xuyến có diện tích bằng diện tích hai mặt do hai nửa đường tròn này quay quanh trục Ox tạo thành. Do đó

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-x^2})\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx \\ &\quad +2\pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-x^2})\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx \\ &= 4\pi ab\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 4\pi ab\arcsin\frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a} = 4\pi^2 ab\ (đvdt). \end{aligned}$$

5.5 Ứng dụng hình học của tích phân suy rộng

Ta sử dụng tích phân suy rộng khi các đại lượng cần tính như diện tích, thể tích, ... xác định trên miền không bị chặn ($x\to\infty$ hoặc $y\to\infty$).

• **Ví dụ 60** Tính diện tích của miền giới hạn bởi đường cong $y=\frac{1}{x^2}$ $(x>0)$, trục hoành và đường thẳng $x=1$.

Giải

$$S = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1.$$

5.6 Ứng dụng của tích phân xác định trong khoa học và kĩ thuật

a) Tổng thay đổi của đại lượng

Nếu $f(t) = F'(t)$ là tốc độ thay đổi của đại lượng $F(t)$ thì theo công thức Newton-Leibnitz

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Do đó

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Tổng thay đổi của đại lượng} \\ \text{giữa } t = a \text{ và } t = b\end{array} = \int_a^b f(t)dt}$$

Nếu $f(t)$ có đơn vị là *đại lượng/thời gian* thì $\int_a^b f(t)dt$ có đơn vị là *đại lượng*.

Ví dụ 61 Số lượng vi khuẩn tại thời điểm $t = 0$ là 14 triệu vi khuẩn. Giả sử số lượng vi khuẩn tăng với tốc độ $F(t) = 2^t$ triệu vi khuẩn/giờ.

a) Tính tổng thay đổi của số lượng vi khuẩn trong 2 giờ từ $t = 0$ đến $t = 2$.

b) Tìm số lượng vi khuẩn tại thời điểm $t = 2$.

Giải

a) Tổng thay đổi của số lượng vi khuẩn từ $t = 0$ đến $t = 2$ bằng

$$\int_0^2 2^t dt = \left.\frac{2^t}{\ln 2}\right|_0^2 = \frac{3}{\ln 2} = 4,328.$$

b) Số lượng vi khuẩn tại thời điểm $t = 0$ là 14 triệu và tăng 4,328 triệu giữa $t = 0$ và $t = 2$. Do đó, tại thời điểm $t = 2$, số lượng vi khuẩn bằng $14 + 4,328 = 18,328$ (triệu vi khuẩn).

b) Công của lực biến thiên

Giả sử một vật chuyển động theo hướng dương trên đường thẳng từ a đến b dưới tác động của lực $F(x)$. Khi đó công của lực sản sinh cho bởi

$$\boxed{W = \int_a^b F(x)dx}$$

• **Ví dụ 62** Theo định luật *Hooke*, trong điều kiện thích hợp một lò xo căng ra x đơn vị (so với độ dài tự nhiên của nó) dưới tác dụng của lực $F(x) = kx$, trong đó k là hằng số.

Giả sử một lò xo căng ra 1 m dưới tác dụng của một lực 5N.

a) Tìm hằng số k.

b) Xác định công để lò xo căng ra 1,8m.

Giải

a) Theo định luật *Hooke* ta có $F(x) = kx$.

Theo giả thiết, $F(x) = 5$N khi $x = 1$. Do đó $k = 5$. Vậy $F(x) = 5x$.

b) Đặt lò xo dọc theo đường thẳng. Ta tìm công để căng lò xo trong khoảng từ $x = 0$ đến $x = 1,8$. Công của lực cần tìm là

$$W = \int_0^{1,8} 5x dx = \frac{5x^2}{2}\Big|_0^{1,8} = 8,1 \text{ J}.$$

Bài tập

1. Tính các tích phân sau :

a) $\int \frac{(x-1)^2}{x\sqrt{x}} dx$; b) $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$;

c) $\int \frac{(2^x+3^x)^2}{2^x 3^x} dx$; d) $\int x\sqrt{x-2} dx$;

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$; f) $\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}$;

g) $\int \sin 2x \sin 3x dx$; h) $\int \tan^2 x dx$;

i) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$; j) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$;

k) $\int \frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1+\tan x}} dx$; m) $\int \frac{dx}{x\cos^2(1+\ln x)}$.

2. Dùng phương pháp đổi biến tính các tích phân sau :

a) $\int x(2x+5)^{10} dx$; b) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$;

c) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4-1}}$; d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$;

e) $\int \frac{dx}{x.\ln x.\ln(\ln x)}$;

f) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$;

g) $\int \frac{dx}{e^x+1}$;

h) $\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$;

i) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$;

j) $\int \sqrt{e^x-1}dx$;

k) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$;

l) $\int \frac{\sin 4x}{4+\cos^4 2x}dx$.

3. Dùng phương pháp tích phân từng phần tính các tích phân sau :

a) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$;

b) $\int \arccos x dx$;

c) $\int x \arcsin x dx$;

d) $\int \arctan \sqrt{x} dx$;

e) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$;

f) $\int \frac{\arctan e^x}{e^x}dx$;

g) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$;

h) $\int \frac{x}{e^x}dx$;

i) $\int (x^2+1)e^{-2x}dx$;

j) $\int x^3 \ln x dx$;

k) $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$;

l) $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}dx$;

m) $\int x \sin x \cos x dx$;

n) $\int e^x \sin x dx$;

o) $\int \frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

p) $\int \sin(\ln x)dx$.

4. Tính tích phân của các hàm hữu tỉ sau :

a) $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$;

b) $\int \frac{xdx}{x^4+3x^2+2}$;

c) $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$;

d) $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx$;

e) $\int \frac{x^2+2x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx$;

f) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$;

g) $\int \frac{dx}{x^3+1}$;

h) $\int \frac{dx}{x^4-1}$;

i) $\int \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}dx$;

j) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

5. Tính tích phân các hàm lượng giác sau :

a) $\int \cos^5 x dx$;

b) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$;

c) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$;

d) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 6\cos x + 5} dx$;

e) $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$;

f) $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx$;

g) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$;

h) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x . \cos^5 x}}$;

i) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$;

j) $\int \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} dx$.

6. Tính tích phân các hàm vô tỉ sau :

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$;

b) $\int \sqrt{x^2 + 2x + 3}\, dx$;

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$;

d) $\int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$;

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x} - \sqrt[4]{1 - 2x}}$;

f) $\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx$;

g) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3 (x-2)}}$;

h) $\int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$;

i) $\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx$;

j) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$;

k) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$;

l) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{(1 + x^3)^5}}$.

m) $\int \frac{x}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} dx$.

7. Tìm công thức truy hồi đối với các tích phân

a) $I_n = \int \sin^n x dx \ (n > 2)$;

b) $\int \frac{x^n}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \ (n > 2)$.

8. Tính tích phân $\int x^n \ln x dx$ nếu :

a) $n \neq -1$; b) $n = 1$.

9. Tính các tích phân sau :

a) $\displaystyle\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$; b) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dx}{1\sqrt{1-\ln^2 x}}$;

c) $\displaystyle\int_0^{2} f(x)dx$ với $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{khi } 1 < x \le 2. \end{cases}$

10. Dùng tích phân xác định tìm các giới hạn sau :

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$;

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$;

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$;

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$;

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$.

11. Tính các đạo hàm sau :

a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^x \ln t dt,\ (x>0)$; b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^0 e^{t^2}dt$; c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

12. Tìm các giới hạn sau :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^4}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}dt}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}dt}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}dt}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}dt}$; d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$.

13. Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến :

a) $\displaystyle\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}$;

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}+1}\,dx$;

d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x\arcsin x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$;

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}\,dx$;

f) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$;

g) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$;

h) $\displaystyle\int_{-3}^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

14. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ thì

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx.$$

Áp dụng, tính các tích phân

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx\ ; \qquad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\,dx.$$

15. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ thì

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

Áp dụng, tính tích phân $\displaystyle I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$

16. Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần :

a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$;

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 x\arctan x dx$;

c) $\displaystyle\int_{1/e}^e |\ln x|dx$;

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\cos x dx$;

e) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$;

f) $\displaystyle\int_0^2 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$.

17. Xét sự hội tụ và tìm giá trị (trong trường hợp hội tụ) của các tích phân suy rộng sau :

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx$;

b) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$;

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$;

d) $\displaystyle\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

e) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$;

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

18. Xét sự hội tụ của các tích phân sau :

a) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$;

b) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2}dx$;

c) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$;

d) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^3}dx$;

e) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$;

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$;

g) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}dx$;

h) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}dx$;

i) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\tan x - x}$;

j) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

19. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường

a) $y = 5 - x^2,\ y = 2 - 2x$;

b) Parabol (P): $y = x^2 - 4x + 5$ và tiếp tuyến của (P) tại điểm $(1\ ;\ 2)$;

c) $x^2 + y^2 = 4x,\ y^2 = 2x$;

d) $x = \frac{1}{e}, x = e, y = 0, y = \ln x$;

e) $y = 2 - x^2,\ y^3 = x^2$;

f) $y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{2}$;

g) $y = (1+e)x, y = (1+e^x)x$;

h) $y^2 = x^2(1-x^2)$.

20. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường

a) $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi), a > 0$ và $y = 0$;

b) $r = a(1 + \cos\varphi) \quad (a > 0)$.

21. Một vật thể cao $6m$. Thiết diện cắt ngang vật thể ở độ cao z m ở phía trên, đáy là một hình chữ nhật với chiều dài $(2 + z)m$ và chiều rộng $(8 - z)m$. Tìm thể tích của vật thể.

22. Một vật có đáy là hình tròn bán kính R. Mọi mặt cắt vuông góc với đường kính của đáy đều có thiết diện là hình vuông. Tìm thể tích của vật.

23. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hai mặt trụ $x^2 + y^2 = a^2$ và $y^2 + z^2 = a^2$.

24. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo nên khi quay các hình phẳng giới hạn bởi các đường sau đây quanh trục tương ứng :

a) $y = 0$, $y = 2x - x^2$ quay quanh trục Ox, Oy ;

b) $y = 0$, $y = x\sin x$ $(0 \le x \le \pi)$ quay quanh trục Ox, Oy ;

c) $y^2 + x - 4 = 0$ quay quanh trục Oy ;

d) $y = x^2 - 2x + 1$, $y = x + 1$ quay quanh trục Ox.

e) $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ quay quanh trục Ox ;

f) $y = x^2$, $y = 4$ quay quanh đường thẳng $x = 2$;

g) $x = 0$, $y = 2$ và $y = x^2 - x$ $(x > 0)$ quay quanh trục Ox.

25. Tính độ dài của các đường cong sau:

a) $2y = x^2 - 2$ gồm giữa các giao điểm của nó với trục hoành;

b) $y^2 = x^3$ từ gốc toạ độ đến điểm $(4 ; 8)$;

c) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$;

d) $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(a > 0)$.

26. Tính diện tính mặt tròn xoay tạo nên do đường

a) $y^2 = 2x$ giữa giao điểm của nó với đường $x = \frac{3}{2}$ quay quanh Ox ;

b) $y = \tan x$, $(0 \le x \le \frac{\pi}{4})$ quay quanh trục Ox.

Hướng dẫn và đáp số bài tập chương 3

1. a) $\dfrac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}}+C$; b) $\ln|x+1|+\dfrac{1}{x+1}+C$;

c) $\dfrac{(2/3)^x}{\ln(2/3)}+\dfrac{(3/2)^x}{\ln(3/2)}+2x+C$; d) $\dfrac{2}{5}(x-2)^{5/2}+\dfrac{4}{3}(x-2)^{3/2}+C$;

e) $\dfrac{1}{3}[(x+1)^{3/2}-(x-1)^{3/2}]+C$; f) $\dfrac{2}{3}\left[x^3-\sqrt{(x^2-1)^3}\right]-x+C$;

g) $-\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+C$; h) $\tan x-x+C$;

i) $-\left(\dfrac{1}{3}\cot^3 x+\cot x\right)+C$; j) $\tan x-\dfrac{1}{\cos x}+C$;

k) $2\sqrt{1+\tan x}+C$; m) $\tan(1+\ln x)+C$.

2. a) $\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{(2x+5)^{12}}{12}-\dfrac{5(2x+5)^{11}}{11}\right]$; b) $2\arctan\sqrt{x}+C$;

c) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{x^4-1})+C$; d) $\ln\dfrac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}}+C$;

e) $\ln|\ln(\ln x)|+C$; f) $\dfrac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x}+C$;

g) $\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}+C$; h) $\ln\left|\dfrac{xe^x}{1+xe^x}\right|+C$; i) $\dfrac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1}+C$;

j) $2(\sqrt{e^x-1}-\arctan\sqrt{e^x-1})+C$; k) $\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}$;

l) $-\dfrac{1}{4}\arctan\left(\dfrac{\cos^2 2x}{2}\right)+C$.

3. a) $x\tan x+\ln|\cos x|+C$; b) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$;

c) $\dfrac{1}{4}(2x^2-1)\arcsin x+\dfrac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$; d) $(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$;

e) $-\dfrac{\arcsin x}{x}-\ln\dfrac{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}{|x|}+C$;

f) $x-e^{-x}\arctan e^x-\dfrac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$;

g) $\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}+C$; h) $-\dfrac{x+1}{e^x}+C$;

i) $-\dfrac{1}{4}e^{-2x}(2x^2+2x+3)+C$; j) $\dfrac{1}{4}(x^4\ln x+x^3)+C$;

k) $\dfrac{2}{3}x^{3/2}.\left(\ln^2 x-\dfrac{4}{3}\ln x+\dfrac{8}{9}\right)$; l) $\sqrt{x^2+1}.\ln(x+\sqrt{x^2+1})-x+C$;

m) $-\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C$; n) $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$;

o) Đặt $t = \arcsin x$, $I = \int e^t \sin t dt$; p) Đặt $t = \ln x$, $\mathrm{I} = \int te^t dt$.

4. a) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|$ b) $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2} + C$;

c) $\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8) + \frac{5}{2}\arctan\frac{x-2}{2} + C$;

d) $-\frac{4}{3(x-1)} + \frac{7}{9}\ln|x+2| + \frac{20}{9}\ln|x-1| + C$;

e) $\ln|x-1| + 2\arctan x + C$; f) $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2(x^2+1)} + C$;

g) $\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}$,

$\mathrm{I} = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$;

h) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C$;

i) $\frac{5x^2+4}{(x^2-1)(x^4+4)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{x^2-1} + \frac{16}{3}\frac{1}{x^2+4}$;

j) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + C$.

5. a) $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$; b) $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x$;

c) Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, $I = \ln|\tan\frac{x}{2} + 1| + C$;

d) Đặt $t = \cos x - 3$, $I = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{5 - \cos x}\right| + C$;

e) Đặt $t = \cos x$, $I = \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + C$;

f) Đặt $t = \sin x$, $I = \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}\sin^2 x + \frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}$;

g) Đặt $t = \tan x$, $I = 2\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x - \frac{1}{\tan x} + C$;

h) Đặt $t = \tan x$, $I = 2(\sqrt{\tan^3 x} - \sqrt{\cot x}) + C$;

i) Đặt $t = \cos^2 x$, $I = \arctan(tan^2 x) + C$; j) $-\ln|\sin x - \cos x| + C$.

6. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5} + C$;

b) $\dfrac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+3}+\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}|+C$;

c) $\sqrt{x^2+x+1}-\dfrac{1}{2}\ln|x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}|+C$;

d) $4\left(\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{t^2}{2}-t-\dfrac{1}{2}\ln(t^2+1)+\arctan t\right)+C$ với $t=\sqrt[4]{x}$;

e) $I=-\left(\sqrt{1-2x}+2\sqrt[4]{1-2x}+2\ln|\sqrt[4]{1-2x}-1|\right)+C$;

f) $-\dfrac{2}{3}\sqrt{\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^3}+C$;

g) $\sqrt{(x-1)^3(x-2)}=(x-1)(x-2)\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$, $I=2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+C$;

h) $-\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+C$; i) $-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+C$;

j) $\sqrt{x^2-1}-\arccos\dfrac{1}{x}+C$; k) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$; l) $-\dfrac{2+3x^3}{2x\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}+C$;

m) Đặt $t=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$, $I=3\left(\dfrac{1}{5}t^5-\dfrac{2}{3}t^3+t\right)+C$.

7. a) $I_n=-\dfrac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$;

b) $I_n=\dfrac{x^{n-1}\sqrt{x^2+1}}{n}-\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$.

8. a) $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+C$; b) $\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$.

9. a) 12 ; b) $\dfrac{\pi}{2}$, c) $\dfrac{5}{6}$.

10. a) $\dfrac{1}{2}$; b) $L=\displaystyle\int_0^1\dfrac{dx}{1+x}=\ln 2$; c) $L=\displaystyle\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}$;

d) $L=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}$; e) $L=\int_0^1 x^k dx=\frac{1}{k+1}$.

11. a) $\ln x$; b) $-e^{x^2}$; c) $\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$.

12. a) $\dfrac{1}{4}$; b) 1 ; c) 1 ; d) 1.

13. a) $\dfrac{29}{270}$; b) $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$; c) $\dfrac{5}{3} - 2\ln 2$; d) Đặt $t = \arcsin x^2$, $I = \dfrac{\pi^2}{144}$

e) Đặt $t = e^x$, $I = \ln \dfrac{e + \sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$; f) $2 - \dfrac{\pi}{2}$;

g) Đặt $x = \cos 2t$, $I = \dfrac{\pi}{4}1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; h) Đặt $x = 3\sin t$, $I = \dfrac{81}{8}\pi$.

14. Đặt $t = \dfrac{\pi}{2} - x$, $I = J = \dfrac{\pi}{4}$. **15.** Đặt $t = \pi - x$, $I = \frac{\pi^2}{4}$.

16. a) $1 - \dfrac{2}{e}$; b) $\dfrac{\pi}{2} - 1$; c) $2\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)$; d) 4π ;

e) $1 + \ln(1+\sqrt{2})$; f) $\dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$.

17. a) -1 ; b) $1 - \ln 2$; c) Phân kì; d) 1 e) 0 ; f) π.

18. a) Phân kì ; b) Hội tụ; c) Hội tụ; d) Phân kì ; e) Hội tụ;
f) Hội tụ; g) Hội tụ; h) Phân kì ; i) Phân kì ; j) Phân kì ;

19. a) $\dfrac{32}{3}$; b) $\dfrac{1}{3}$; c) $2(\dfrac{8}{3} + \pi)$; d) $2(1 - \dfrac{1}{e})$; e) $\dfrac{32}{15}$;

f) $S = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$; g) $\dfrac{e}{2} - 1$; h) $\dfrac{4}{3}$.

20. a) $3a^2\pi$; b) $\dfrac{3}{2}a^2\pi$. **21.** $V = \int\limits_0^6 (-z^2 + 6z + 16)dz = 132$.

22. $V = 2\int\limits_0^R 4(R^2 - r^2)dx = \frac{16}{3}R^3$. **23.** $V = 8\int\limits_0^a (a^2 - y^2)dy = \frac{16}{3}a^3$.

24. a) $V_x = \dfrac{16}{15}\pi$, $V_y = \frac{8}{3}\pi$; b) $V_x = \dfrac{\pi^4}{6} - \dfrac{\pi^2}{2}$, $V_y = 2\pi^3 - 8\pi$;

c) $V_y = \pi\int\limits_{-2}^{2} (4 - y^2)^2 dy = \frac{512}{15}\pi$;

d) $V = \pi\int\limits_0^3 [(x+1)^2 - (x-1)^4]dx = \frac{72}{5}\pi$;

e) $V = 8\pi\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = 4\pi^2$; f) $V = \frac{128}{3}\pi$; g) $V = \frac{209}{30}\pi$.

25. a) $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$; b) $\dfrac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$; c) $2a\pi^2$; d) $8a$.

26. a) $\dfrac{14}{3}\pi$;

Chương 4

CHUỖI

§1. Chuỗi số

1.1 Khái niệm chuỗi số

□ **Định nghĩa 1** Cho dãy số $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$. Tổng vô hạn

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{4.1}$$

được gọi là chuỗi số và kí hiệu là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

u_n được gọi là số hạng thứ n (hay số hạng tổng quát) của chuỗi số.

Tổng của n số hạng đầu tiên $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi số.

Nếu tồn tại $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ (hữu hạn) thì ta nói chuỗi số (4.1) hội tụ và có tổng là s. Khi đó ta kí hiệu $s = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_n$.

Nếu dãy $\{s_n\}_n$ không có giới hạn hữu hạn thì ta nói chuỗi số phân kì.

• **Ví dụ 1** Xét sự hội tụ của chuỗi số $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \ldots$

Giải

Ta có $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ nên

$$\begin{aligned} s_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = 1.$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ và có tổng là $s = 1$.

• **Ví dụ 2** Xét sự hội tụ của chuỗi điều hoà $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

Giải

Với mỗi x thoả $k \le x \le k+1$ ta có $\dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{k}$ nên $\dfrac{1}{k} = \int\limits_k^{k+1}\dfrac{1}{k}dx \ge \int\limits_k^{k+1}\dfrac{1}{x}dx$.

Do đó

$$\begin{aligned} s_n &= 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} \\ &\ge \int_1^2 \tfrac{1}{x}dx + \int_2^3 \tfrac{1}{x}dx + \ldots + \int_n^{n+1}\tfrac{1}{x}dx = \int_1^{n+1}\tfrac{1}{x}dx = \ln(n+1) \to +\infty. \end{aligned}$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ phân kì.

◎ **Chuỗi hình học**

Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ $(a \ne 0)$ được gọi là chuỗi hình học.

Xét $s_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = a\dfrac{q^n-1}{q-1}$.

* Nếu $|q| < 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a\lim_{n\to\infty}\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{a}{1-q}.$$

Do đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ hội tụ và có tổng là $\dfrac{a}{1-q}$.

* Nếu $|q| > 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$. Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$. Do đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ phân kì.

* Nếu $|q| = 1$ thì ta xét hai trường hợp :

Khi $q = 1$, ta có $s_n = a + a + \ldots + a = na$. Ta thấy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$ nếu $a < 0$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ nếu $a > 0$. Trường hợp này chuỗi phân kì.

Khi $q = -1$ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a - a + a - a + \ldots$ Ta thấy dãy tổng riêng

$\{s_{2k}\}_k$ hội tụ về 0, còn dãy tổng riêng $\{s_{2k+1}\}_k$ hội tụ về a. Trường hợp này chuỗi phân kì.

Vậy

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} : \begin{cases} \text{Hội tụ} & \text{khi} \quad |q| < 1 \\ \text{Phân kì} & \text{khi} \quad |q| \geq 1 \end{cases}}$$

□ **Định nghĩa 2** Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và có tổng là s thì hiệu $r_n = s - s_n$ được gọi là số hạng dư thứ n của chuỗi số.

Trong trường hợp này ta có $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

△ **Định lí 1** *Chuỗi (u) : $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại N, sao cho với mọi $n > N$, $p \in \mathbb{N}$ ta có*

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Chứng minh

$$\begin{aligned} \text{Chuỗi } (u) \text{ hội tụ} \quad &\Leftrightarrow \quad \{s_n\} \text{ hội tụ} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N \text{ ta có } |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon. \end{aligned}$$

1.2 Điều kiện cần để chuỗi hội tụ

△ **Định lí 2** *Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.*

Chứng minh

Ta có $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = s_{n-1} + u_n$. Từ đó $u_n = s_n - s_{n-1}$.

Do đó nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và có tổng là s thì

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0. \quad \blacksquare$$

△ **Hệ quả 1** (*Tiêu chuẩn phân kì*)

Nếu $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

Ví dụ : Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ phân kì vì $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

⊙ **Chú ý** Nếu $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ thì không thể khẳng định rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Chẳng hạn, xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ta thấy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ nhưng chuỗi này phân kì vì

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty.$$

1.3 Các tính chất đơn giản của chuỗi số

*** Tính chất 1**

Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và có tổng là s thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} au_n$ cũng hội tụ và có tổng là as. Ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = a\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Chứng minh

Gọi s_n, σ_n tương ứng là tổng riêng thứ n của các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} au_n$.

Ta có

$$\sigma_n = au_1 + au_2 + \ldots + au_n = a(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = as_n.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} as_n = as.$$

Chứng tỏ chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} au_n$ hội tụ và có tổng là as. ∎

• Tính chất 2

Nếu các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ và có tổng lần lượt là u, v thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ cũng hội tụ và có tổng là $u \pm v$. Ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Chứng minh

Gọi $s_n, s_n^{'}, \sigma_n$ tương ứng là tổng riêng thứ n của các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$. Ta có

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) \\
&= (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) + (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) \\
&= s_n + s_n^{'}.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (s_n + s_n^{'}) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} s_n^{'} = u + v.$$

Chứng tỏ chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ hội tụ và có tổng là $u + v$.

Tương tự, ta chứng minh được chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - v_n)$ cũng hội tụ và có tổng là $u - v$.

*** Tính chất 3**

Tính hội tụ hay phân kì của một chuỗi số không thay đổi nếu ta bớt đi một số hữu hạn các số hạng đầu tiên của chuỗi.

§2. Chuỗi số dương

2.1 Khái niệm chuỗi số dương

□ **Định nghĩa 3** Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ trong đó $u_n > 0, \forall n$ được gọi là chuỗi số dương.

▶ **Tiêu chuẩn hội tụ**

△ **Định lí 3** *Nếu dãy tổng riêng $\{s_n\}_n$ của chuỗi số dương bị chặn thì chuỗi hội tụ.*

Chứng minh

Ta có $s_{n+1} = s_n + u_n > s_n, \forall n$ nên $\{s_n\}_n$ là dãy tăng. Theo giả thiết dãy này bị chặn trên nên dãy hội tụ. Do đó chuỗi hội tụ. ∎

◇ **Nhận xét** Trường hợp chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ không hội tụ thì ta có $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$.

2.2 Các dấu hiệu so sánh

△ **Định lí 4** *Cho hai chuỗi số dương* $(u) : \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *và* $(v) : \sum_{n=1}^{\infty} v_n$. *Giả sử tồn tại số* $c > 0$ *sao cho* $u_n \leq cv_n, \forall n$. *Khi đó*

i) Nếu chuỗi (v) *hội tụ thì chuỗi* (u) *hội tụ.*

ii) Nếu chuỗi (u) *phân kì thì chuỗi* (v) *phân kì.*

Chứng minh

Gọi s_n, σ_n tương ứng là tổng riêng thứ n của chuỗi (u), (v).

Vì $u_n \leq cv_n \; \forall n$ nên $s_n \leq c\sigma_n \; \forall n$.

Nếu chuỗi (v) hội tụ thì dãy $\{\sigma_n\}$ bị chặn trên. Dẫn đến dãy $\{s_n\}$ bị chặn trên. Do đó chuỗi (u) hội tụ.

Nếu chuỗi (u) phân kì thì $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ nên $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$. Do đó chuỗi (v) phân kì. ∎

• **Ví dụ 3** Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$.

Giải

Ta có $\frac{1}{n.2^n} \leq \frac{1}{2^n}, \forall n$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ nên chuỗi đã cho hội tụ.

• **Ví dụ 4** Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$.

Giải

Ta có $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}-1}, \forall n > 1$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kì nên chuỗi đã cho phân kì.

Định lí 5 *Cho hai chuỗi số dương* $(u) : \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *và* $(v) : \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Gọi $k = \lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$.

* *Khi* $0 < k < +\infty$ *: các chuỗi* (u) *và* (v) *cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.*

* *Khi* $0 \le k < +\infty$ *: nếu* (v) *hội tụ thì* (u) *hội tụ.*

* *Khi* $0 < k \le +\infty$ *: nếu* (v) *phân kì thì* (u) *phân kì.*

Chứng minh

Giả sử chuỗi (v) hội tụ và $0 \le k < +\infty$, với $k = \lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$.

Khi đó với $\varepsilon_0 > 0$, tồn tại N sao cho với mọi $n > N$ ta có

$$\frac{u_n}{v_n} < k + \varepsilon \quad \text{hay} \quad u_n \le (k+\varepsilon)v_n.$$

Nếu chuỗi (v) hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=N+1}^{\infty} v_n$ hội tụ. Theo dấu hiệu so sánh ở định lí 4 ta suy ra chuỗi số $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ hội tụ. Vậy chuỗi (u) hội tụ. ■

* **Ví dụ 5** Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{x}{n}$ $(0 < x < \pi)$.

Giải

Ta thấy $\sin\dfrac{x}{n} > 0, \forall x \in (0,\pi)$ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{x}{n}$ là chuỗi số dương.

Ta có $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{1}{n}} = x \in (0,\pi)$ và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kì.

Vậy chuỗi số đã cho phân kì.

* **Ví dụ 6** Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)3^n}$.

Giải

Vì $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n}{(n+1)3^n}}{(\frac{1}{3})^n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ hội tụ nên chuỗi đã cho hội tụ.

Chuỗi điều hoà tổng quát

Chuỗi điều hoà tổng quát là chuỗi $(u) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s \in \mathbb{R})$.

* Khi $s \leq 1$: Ta có $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^s}, \forall n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì nên chuỗi (u) phân kì.

* Khi $s > 1$: Với mọi x thoả $1 < x \leq k, k \in \mathbb{N}$ ta có

$$\frac{1}{k^s} = \int_{k-1}^{k} k^{-s} dx \leq \int_{k-1}^{k} x^{-s} dx,$$

nên

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^s} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} x^{-s} dx = \int_{1}^{n} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{(1-s)x^{s-1}}\Bigg|_1^n = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)n^{s-1}}.$$

Từ đó

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{s-1}.$$

Do đó chuỗi (u) hội tụ.

Vậy

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} \text{hội tụ} & \text{khi} \quad s > 1 \\ \text{phân kì} & \text{khi} \quad s \leq 1 \end{cases}}$$

2.3 Các tiêu chuẩn hội tụ

a) Tiêu chuẩn D'Alembert

Δ Định lí 6 *Cho chuỗi số dương* $(u) : \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Giả sử $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. *Khi đó*

- *Nếu* $l < 1$ *thì* (u) *hội tụ.*
- *Nếu* $l > 1$ *thì* (u) *phân kì.*

Chứng minh

Vì $u_n > 0 \ \forall n$ nên $l \geq 0$.

i) Khi $l < 1$: Ta chọn $\varepsilon > 0$ đủ bé sao cho $l + \varepsilon = q < 1$. Vì $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

...ên với n đủ lớn ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon = q.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} u_{n+1} &< u_n q \\ u_{n+2} &< u_{n+1} q < u_n q^2 \\ \ldots &< \ldots \\ u_{n+k} &< u_n q^k. \end{aligned}$$

Ta thấy $\sum_{k=1}^{\infty} u_n q^k$ là tổng của một cấp số nhân với công bội q $(0 < q < 1)$ nên chuỗi này hội tụ. Do đó chuỗi (u) hội tụ.

ii) Khi $l > 1$: Với n đủ lớn ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Từ đó $u_{n+1} > u_n > 1$. Ta suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Vậy chuỗi (u) phân kì. ■

⊙ **Chú ý** Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$ thì chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

Thật vậy, vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$ nên $\exists N > 0$ sao cho $\forall n > N$ ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ hay $u_{n+1} > u_n > 1$. Từ đó $\{u_n\}$ không dần về 0 khi $n \to \infty$.

Do đó chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

• **Ví dụ 7** Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Giải

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$, nên theo tiêu chuẩn D'Alembert chuỗi đã cho hội tụ.

• **Ví dụ 8** Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$.

Giải

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}}{e^n} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} = e > 1$, nên theo tiêu chuẩn D'Alembert chuỗi đã cho phân kì.

b) Tiêu chuẩn Cauchy

△ **Định lí 7** *Cho chuỗi số dương (u) :* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Giả sử $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. *Khi đó*

* *Nếu* $l < 1$ *thì (u) hội tụ.*
* *Nếu* $l > 1$ *thì (u) phân kì.*

Chứng minh

* Nếu $l < 1$ thì tồn tại số q sao cho $l < q < 1$. Do $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ nên tồn tại n_0 sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $\sqrt[n]{u_n} < q$ hay $u_n < q^n$.

Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ hội tụ nên theo định lí 4 chuỗi (u) hội tụ.

* Nếu $l > 1$ thì tồn tại n_0 sao cho với mọi $n \geq n_0$ ta có $\sqrt[n]{u_n} > 1$ hay $u_n > 1$. Theo hệ quả 1, chuỗi (u) phân kì. ■

⊙ **Chú ý** Nếu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty$ thì chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

• **Ví dụ 9** Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$.

Giải

Ta có $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1$.

Theo tiêu chuẩn Cauchy, ta suy ra chuỗi đã cho phân kì.

• **Ví dụ 10** Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Giải

Ta có $u_n = \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]^n$ nên

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1.$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy, ta suy ra chuỗi đã cho hội tụ.

⊙ **Chú ý** Khi dùng dấu hiệu D'Alembert hoặc Cauchy, nếu $l = 1$ thì ta không thể khẳng định gì về sự hội tụ hay phân kì của chuỗi số dương. Trong trường hợp này, tiêu chuẩn dưới đây đủ mạnh để cho ta biết chuỗi hội tụ hay phân kì.

c) Tiêu chuẩn tích phân Cauchy

Định lí 8 *Cho chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, trong đó $u_n = f(n)$ và $f(x)$ là hàm không âm, liên tục, đơn điệu giảm trên $[1, +\infty)$.*

Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ và tích phân suy rộng $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}$

Chứng minh

Với mọi $x \in [n, n+1]$ ta có $f(n+1) \le f(x) \le f(n)$ hay $u_{n+1} \le f(x) \le u_n$. Từ đó

$$u_{n+1} \le \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \le u_n.$$

Gọi s_k là tổng riêng thứ k của chuỗi, ta có

$$s_{k+1} - u_1 \le \sum_{n=1}^{k} \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \le s_k$$

hay

$$s_{k+1} - u_1 \le \int\limits_1^{k+1} f(x)dx \le s_k. \tag{4.2}$$

Từ (4.2) ta thấy dãy $\{s_k\}$ và tích phân $\int\limits_1^{k+1} f(x)dx$ cùng bị chặn hoặc không bị chặn. Từ đó ta chứng minh được định lí. ■

• **Ví dụ 11** Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Giải

Chuỗi phân kì vì

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_2^{b} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b \to +\infty} \ln(\ln x)\Big|_2^{b} = +\infty.$$

§3. Chuỗi có dấu bất kì

3.1 Chuỗi đan dấu

□ **Định nghĩa 4** Chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots \quad (u_n > 0, \forall n)$$

được gọi là chuỗi đan dấu.

△ **Định lí 9** (Dấu hiệu Leibnitz) *Cho chuỗi đan dấu* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$.

Nếu $u_{n+1} < u_n$, $\forall n$ *và* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ *thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ *hội tụ và tổng của nó không vượt quá số hạng đầu tiên* u_1.

Chứng minh

Gọi s_n là tổng riêng thứ n của chuỗi.

* Với n chẵn, $n = 2m$, ta có

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Vì $u_{n+1} < u_n$ $\forall n$ nên $\{s_n\}$ là dãy số đơn điệu tăng.

Mặt khác,

$$s_{2m} = u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \ldots + u_{2m})] < u_1$$

nên dãy $\{s_{2m}\}$ bị chặn trên bởi u_1.

Do đó tồn tại $\lim_{m\to\infty} s_{2m} = s$ và $s \le u_1$. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại N_1 sao cho với mọi $m > N_1$ ta có $|s_{2m} - s| < \frac{\varepsilon}{2}$.

* Với n lẻ, $n = 2m + 1$, ta có

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}.$$

Theo giả thiết $\lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$ nên $\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = s$. Ta suy ra với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại N_2 sao cho với mọi $m > N_2$ ta có $|s_{2m+1} - s| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Đặt $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$ thì với mọi $n > N$ ta có $|s_n - s| < \varepsilon$. Điều này chứng tỏ $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

Vậy chuỗi số hội tụ và có tổng $s \le u_1$. ∎

Chú ý Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ hội tụ theo dấu hiệu Leibnitz thì phần dư $r_n = s - s_n$ cũng là chuỗi đan dấu, chuỗi này hội tụ theo dấu hiệu Leibnitz và tổng của chuỗi về trị tuyệt đối nhỏ hơn u_{n+1}. Do đó, nếu thay s bởi s_n thì sai số phạm phải về trị tuyệt đối nhỏ hơn u_{n+1}.

Ví dụ 12 Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Giải

Chuỗi hội tụ theo dấu hiệu Leibnitz vì $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}, \forall n$ và $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Nếu thay s bởi s_{100} thì sai số $\delta = |s - s_{100}| < \frac{1}{101} < 0,01$.

3.2 Chuỗi hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ

Định lí 10 *Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ.*

Chứng minh

Gọi s_n và σ_n là tổng riêng thứ n của các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$. Đặt s_n^+, s_n^- theo thứ tự là tổng các số hạng dương và tổng các trị tuyệt đối của các số hạng âm trong n số hạng đầu tiên của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$. Ta có

$$s_n = s_n^+ - s_n^-, \ \sigma_n = s_n^+ + s_n^-.$$

Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ nên tồn tại $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \sigma$, với $\sigma_n \le \sigma$. Khi đó $s_n^- \le \sigma_n \le \sigma$, $s_n^+ \le \sigma_n \le \sigma$.

Các dãy $\{s_n^-\}, \{s_n^+\}$ tăng và bị chặn trên bởi σ nên tồn tại các giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} s_n^- = s^-, \lim_{n\to\infty} s_n^+ = s^+.$$

Do đó tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_n^+ - \lim_{n\to\infty} s_n^- = s^+ - s^-.$$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ. ■

⊙ **Chú ý**

i) Điều ngược lại của định lí 10 không đúng. Có những chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kì. Chẳng hạn chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ hội tụ nhưng chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ phân kì.}$$

ii) Khi dùng dấu hiệu D'Alembert hoặc Cauchy mà chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kì thì ta suy ra được chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

□ **Định nghĩa 5** Cho các chuỗi số $(u) : \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $(|u|) : \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Nếu chuỗi $(|u|)$ hội tụ (suy ra (u) hội tụ) thì chuỗi (u) được gọi là hội tụ tuyệt đối.

Nếu chuỗi (u) hội tụ mà chuỗi $(|u|)$ phân kì thì (u) được gọi là bán hội tụ.

• **Ví dụ 13** Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ bán hội tụ.

• **Ví dụ 14** Xét sự hội tụ tuyệt đối hoặc bán hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$.

Giải

Ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ hội tụ vì $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, \forall n$ và $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

3.3 Các tính chất của chuỗi hội tụ tuyệt đối

• **Tính chất 1**

Nếu chuỗi số (u) : $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối và có tổng là s thì chuỗi suy từ (u) bằng cách thay đổi tuỳ ý vị trí các số hạng của (u) cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng là s.

Tính chất 2

Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ bán hội tụ thì ta có thể thay đổi vị trí các số hạng của chuỗi số để thu được một chuỗi hội tụ hoặc phân kì.

3.4 Tích hai chuỗi số

□ **Định nghĩa 6** Cho hai chuỗi số $(u) : \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $(v) : \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Tích của hai chuỗi (u) và (v) là chuỗi lập nên bởi tích các số hạng của chúng từng đôi một sắp theo thứ tự.

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1)$$

$$+ \ldots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_{n-1}v_2 + u_nv_1) + \cdots$$

◇ **Tính chất**

Nếu hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ tuyệt đối và có tổng tương ứng là s, s' thì tích của chúng cũng hội tụ và có tổng là $s.s'$.

§4. Chuỗi hàm

4.1 Khái niệm chuỗi hàm

□ **Định nghĩa 7** Cho các hàm số $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ cùng xác định trên tập X. Khi đó chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \cdots$$

được gọi là chuỗi hàm.

$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi hàm.

Nếu tồn tại $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ thì ta nói chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ và $S(x)$ là tổng của chuỗi hàm. Ta kí hiệu $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Khi đó $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ được gọi là phần dư thứ n của chuỗi hàm và có $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Cho $x = x_0$ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ là chuỗi số. Với x khác nhau ta được các chuỗi số khác nhau.

x_0 được gọi là điểm hội tụ (phân kì) của chuỗi hàm nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ hội tụ (phân kì). Tập hợp các điểm hội tụ của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm.

- **Ví dụ 15** Xét chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$

Ta thấy $S_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x}$. Dãy $\{S_n(x)\}_n$ hội tụ khi $|x| < 1$ và $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Vậy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ và miền hội tụ của chuỗi hàm này là $(-1, 1)$.

- **Ví dụ 16** Xét chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

Ta thấy chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$ hội tụ khi $x > 1$ và phân kì khi $x \le 1$. Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm đã cho là $(1, +\infty)$.

- **Ví dụ 17** Xét chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

* Khi $x = 0$ thì chuỗi hội tụ và có tổng là 0.
* Khi $x \neq 0$: Ta dùng dấu hiệu D'Alembert xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|x|^n}{n!}$.

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x|^{n+1}.n!}{|x|^n.(n+1)!} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 < 1, \forall x \neq 0$.

Do đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|x|^n}{n!}$ hội tụ. Suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ hội tụ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm là $(-\infty, +\infty)$.

4.2 Hội tụ đều và hội tụ tuyệt đối

□ **Định nghĩa 8** Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là hội tụ đều về hàm $S(x)$ trên tập X nếu $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ sao cho $\forall n > N$, $\forall x \in X$ ta có $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

□ **Định nghĩa 9** Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ hội tụ.

Δ **Định lí 11** (`Weierstrass`) *Cho chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. *Nếu* $|u_n(x)| \leq a_n, \forall n,$

$\forall x \in X$ *và chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ thì chuỗi hàm hội tụ tuyệt đối và đều trên* X.

Chứng minh

Theo dấu hiệu so sánh ở định lí 4 ta suy ra chuỗi hàm hội tụ tuyệt đối trên X. Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$.

Vì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $N > 0$ sao cho với mọi $n > N$ ta có

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Khi đó với mọi $m > n > N$, với mọi $x \in X$ ta có

$$\begin{aligned} |S_m(x) - S_n(x)| &= |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_m(x)| \\ &\leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \ldots + |u_m(x)| \\ &\leq a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Cho $m \to \infty$ thì $|S(x) - S_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Điều này chứng tỏ chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên X.

• **Ví dụ 18** Xét chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$.

Vì $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, \forall x$ và chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi hàm đã cho hội tụ tuyệt đối và đều trên $\mathbb{R}$.

▶ Các tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều

Ta biết rằng tổng hữu hạn các hàm liên tục là một hàm liên tục, tích phân (đạo hàm) của tổng hữu hạn các hàm bằng tổng các tích phân (đạo hàm) của các số hạng. Đối với tổng vô hạn các hàm thì các tính chất trên nói chung không còn đúng. Tuy nhiên, các tính chất này vẫn đúng đối với chuỗi hàm hội tụ đều.

△ **Định lí 12** (*Tính liên tục*) *Cho chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ trong đó các hàm $u_n(x)$ liên tục trên tập X. Nếu chuỗi hàm hội tụ đều về hàm $S(x)$ trên X thì $S(x)$ liên tục trên X.*

△ **Định lí 13** (*Tính khả vi*) *Cho chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ trong đó các hàm $u_n(x)$, $u_n'(x)$ liên tục trong (a, b). Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ có tổng là $S(x)$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ hội tụ đều trong (a, b) thì $S(x)$ có đạo hàm trong (a, b) và có*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Như vậy, ta có thể lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ trong (a, b).

△ **Định lí 14** (*Tính khả tích*) *Cho chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ trong đó các hàm $u_n(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Nếu chuỗi hàm hội tụ đều về hàm $S(x)$ trên $[a, b]$ thì $S(x)$ khả tích trên $[a, b]$ và có*

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$$

Như vậy, ta có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ trên $[a, b]$.

§5. Chuỗi hàm luỹ thừa

5.1 Khái niệm về chuỗi hàm luỹ thừa

□ **Định nghĩa 10** Chuỗi hàm luỹ thừa là chuỗi hàm có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

hay

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{4.3}$$

5.2 Miền hội tụ của chuỗi hàm luỹ thừa

△ **Định lí 15** (Abel) *Nếu chuỗi hàm luỹ thừa* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *hội tụ tại* $x_0 \neq 0$ *thì nó hội tụ tuyệt đối tại* x *thoả* $|x| < |x_0|$.

Chứng minh

Vì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ nên $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Do đó dãy $\{a_n x_0^n\}$ bị chặn, tức là tồn tại $M > 0$ sao cho $|a_n x_0^n| \leq M \ \ \forall n$.

Khi đó với mọi n ta có

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Mặt khác, vì x thoả $|x| < |x_0|$ nên chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ hột tụ. Theo định lí 4 ta suy ra chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ hội tụ. ■

△ **Hệ quả 2** *Nếu chuỗi luỹ thừa (4.3) phân kì tại* $x = x_0$ *thì nó phân kì tại mọi* x *thoả* $|x| > |x_0|$.

Thật vậy, nếu chuỗi (4.3) hội tụ tại $x = x_1$ thoả $|x_1| > |x_0|$ thì theo định lí Abel chuỗi hội tụ tuyệt đối tại $x = x_0$. Điều này trái với giả thiết.

◇ **Nhận xét**

i) Khi $x = 0$ thì chuỗi (4.3) hội tụ và có $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0$. Ta thấy (4.3) có ít nhất một điểm hội tụ.

ii) Nếu (4.3) hội tụ tại x_0 thì (4.3) hội tụ tuyệt đối trong khoảng $(-|x_0|, |x_0|)$ (theo định lí 15). Nếu (4.3) phân kì tại x_0 thì (4.3) phân kì tại x sao cho $|x| > |x_0|$.

Theo ii) ta thấy sẽ tồn tại một số r với $0 < r < +\infty$ sao cho (4.3) hội tụ tuyệt đối trong khoảng $(-r, r)$ và phân kì trong các khoảng $(-\infty, -r), (r, +\infty)$. Tại $x = \pm r$ thì (4.3) có thể hội tụ hoặc phân kì.

Số r ở trên được gọi là *bán kính hội tụ* và khoảng $(-r, r)$ được gọi là *khoảng hội tụ* của chuỗi hàm luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Ta quy ước :

* Nếu $r = 0$ thì miền hội tụ của (4.3) là $X = \{0\}$.
* Nếu $r = +\infty$ thì miền hội tụ của (4.3) là $X = (-\infty, +\infty)$.

Hadamard

△ **Định lí 16** *Cho chuỗi hàm luỹ thừa (4.3) :* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Nếu $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ *hoặc* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ *thì bán kính hội tụ r của (4.3) được xác định như sau :*

$$r = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } l = 0 \\ \frac{1}{l} & \text{nếu } 0 < l < +\infty \\ 0 & \text{nếu } l = +\infty. \end{cases}$$

Chứng minh

Giả sử $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \quad (0 < l < +\infty)$.

Với $|x| < \frac{1}{l}$ ta có $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| < l.\frac{1}{l} = 1$, nên chuỗi hội tụ theo dấu hiệu D'Alembert.

Với $|x| > \frac{1}{l}$ thì $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| > l.\frac{1}{l} = 1$, nên theo dấu hiệu D'Alembert chuỗi phân kì.

Nếu $l = 0$ thì hiển nhiên $r = +\infty$.

Nếu $l = +\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| = 0$, nên chuỗi hội tụ với mọi x, tức là $r = +\infty$.

Trường hợp còn lại được chứng minh tương tự, bằng cách dùng dấu hiệu Cauchy.

⊛ Cách tìm miền hội tụ của hàm lũy thừa (4.3)

Ta tìm khoảng hội tụ $(-r, r)$. Sau đó xét thêm sự hội tụ tại hai đầu mút $x = \pm r$.

• **Ví dụ 19** Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm luỹ thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

Giải

Vì $l = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ nên ta có khoảng hội tụ $(-1, 1)$.

* Tại $x = 1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kì.

* Tại $x = -1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n}$ hội tụ theo dấu hiệu Leibnitz.

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm luỹ thừa là $X = [-1, 1)$.

• **Ví dụ 20** Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm luỹ thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

Giải

Vì $l = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!} = 0$ nên bán kính hội tụ $r = +\infty$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm luỹ thừa là $X = (-\infty, +\infty)$.

• **Ví dụ 21** Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm luỹ thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$.

Giải

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ nên bán kính hội tụ $r = 0$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm luỹ thừa là $X = \{0\}$.

- **Ví dụ 22** Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$.

Giải

Đặt $y = x+1$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{\sqrt{n}}$ (P).

Ta tìm miền hội tụ của chuỗi hàm luỹ thừa (P) :

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

(P) có bán kính hội tụ $r = \frac{1}{l} = 1$ nên có khoảng hội tụ $(-1, 1)$.

Tại $y = -1$: Ta có chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Vì $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = u_n$ $\forall n$ và $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ nên chuỗi này hội tụ theo dấu hiệu Leibnitz.

Tại $y = 1$: Ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, chuỗi có dạng chuỗi điều hoà tổng quát $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ với $s = -\frac{1}{2} < 1$ nên phân kì.

Do đó miền hội tụ của (P) là $-1 \le y < 1$. Thay $y = x+1$ ta được $-1 \le x+1 < 1$ hay $-2 \le x < 0$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$ là $[-2, 0)$.

5.3 Các tính chất của chuỗi hàm luỹ thừa

- **Tính chất 1**

Nếu chuỗi hàm luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ là $r \neq 0$ thì chuỗi hội tụ đều trong $[-r', r']$ với $0 < r' < r$.

- **Tính chất 2**

Tổng của chuỗi hàm luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ là hàm liên tục trong khoảng hội tụ $(-r, r)$.

- **Tính chất 3**

Có thể lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tại mọi x thuộc khoảng hội tụ $(-r,r)$ và có

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Hơn nữa, chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ cũng có bán kính hội tụ là r.

- **Ví dụ 23** Tính tổng $S(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots \quad (-1 < x < 1).$

Giải

Áp dụng tính chất 3, $\forall x \in (-1,1)$ ta có

$$S'(x) = 1 + x + \ldots + x^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

Suy ra

$$S(x) = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x) + C.$$

Cho $x = 0$ thì $1 = S(0) = C$. Vậy $S(x) = 1 - \ln(1-x)$.

*** Tính chất 4**

Có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ trên đoạn bất kì $[a,b]$ nằm trong khoảng hội tụ $(-r,r)$ và có

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx.$$

Đặc biệt,

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx, \quad \forall x \in (-r,r).$$

- **Ví dụ 24** Tính tổng $S(x) = x + 2x^2 + \ldots + nx^n + \ldots \quad (-1 < x < 1).$

Giải

Ta có $S(x) = x(1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} + \ldots)$.

Gọi $S_1(x) = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$ thì $S(x) = xS_1(x)$.

Áp dụng tính chất 4 cho $S_1(x)$ với $x \in (0, 1)$ ta có

$$\int_0^x S_1(x)dx = x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{x}{1-x}.$$

Đạo hàm hai vế đẳng thức trên theo x ta được $S_1(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Vậy $S(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

5.4 Khai triển hàm thành chuỗi hàm luỹ thừa

□ **Định nghĩa 11** Hàm $f(x)$ gọi là khai triển thành chuỗi hàm luỹ thừa trong khoảng $(-r, r)$ nếu tồn tại chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sao cho

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \forall x \in (-r, r).$$

△ **Định lí 17** (Điều kiện cần) *Nếu $f(x)$ khai triển được thành chuỗi hàm luỹ thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ trong khoảng $(-r, r)$ thì $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong $(-r, r)$ và có*

$$f^{(k)}(0) = k!a_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Chứng minh

Giả sử $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-r, r)$. Ta có

$$f'(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$$

và chuỗi này cũng có khoảng hội tụ$(-r, r)$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2a_2 + 3.2a_3 x + 4.3a_4 x^2 + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

Tiếp tục quá trình ta được $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n x^{n-k}$ và chuỗi này cũng có khoảng hội tụ$(-r, r)$.

Cho $x = 0$ thì $f^{(k)}(0) = k(k-1)\ldots 1.a_k = k!a_k$. ■

◇ **Nhận xét**

i) Nếu $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ thì $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Khi đó

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

ii) Chuỗi hàm $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ được gọi là chuỗi Mac Laurin của hàm $f(x)$.

* Chuỗi Mac Laurin có thể không hội tụ.

* Chuỗi Mac laurin có thể hội tụ về hàm khác $f(x)$.

△ **Định lí 18 (Điều kiện đủ)** *Nếu tồn tại một số $M > 0$ sao cho $|f^{(n)}(x)| \leq M$, $\forall x \in [-r, r]$ thì hàm $f(x)$ có thể khai triển thành chuỗi hàm luỹ thừa trên $[-r, r]$.*

Chứng minh

Khai triển Mac Laurin hàm $f(x)$, ta có

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

với c nằm giữa 0 và x.

Đặt $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Ta cần chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$. Với mọi

$x \in [-r, r]$ ta có

$$|f(x) - S_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq M \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{4.4}$$

Theo tiêu chuẩn D'Alembert, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{r^{n+1}}{(n+1)!}$ hội tụ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r^{n+1}}{(n+1)!}$ ...

Cho qua giới hạn (4.4) khi $n \to \infty$ ta được $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$. Vậy $f(x)$ khai triển được thành chuỗi hàm luỹ thừa trên $[-r, r]$. ■

- **Khai triển Mac Laurin của một số hàm**

i) $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$

Xét hàm $f(x) = e^x$.

Ta có $f^{(k)}(x) = e^x$, $\forall k$. Từ đó $f^{(k)}(0) = 1$, $\forall k$. Chuỗi Mac Laurin của $f(x)$ có dạng $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} x^n$.

Xét $k \geq 1$, với $N > 0$ cố định và với mọi $x \in (-N, N)$ ta có

$$|f^{(k)}(x)| = e^x < e^N$$

nên $f^{(k)}(x)$ bị chặn trong khoảng $(-N, N)$. Do đó $f(x)$ có thể khai triển thành chuỗi hàm luỹ thừa ở lân cận $(-N, N)$ của 0. Vì $N > 0$ bất kì nên $f(x)$ có thể khai triển thành chuỗi hàm luỹ thừa trên $\mathbb{R}$.

Do đó

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$

Xét hàm $f(x) = \sin x$.

Ta có $f^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$. Với mọi $k \geq 1$ và với mọi x thì

$$|f^{(k)}(x)| = |\sin(x + k\frac{\pi}{2})| \leq 1.$$

Do đó $f(x)$ có thể khai triển thành chuỗi Mac Laurin trong $\mathbb{R}$ và có

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

iii) Tương tự khai triển ii), ta có

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

iv) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$, $x \in (-1,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Xét hàm $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta có

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Do đó

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} + R_n(x)$$

trong đó $R_n(x) = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!} \cdot \dfrac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}} x^{n+1}$ $(0 < \theta < 1)$.

Người ta chứng minh được $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, $\forall x \in (-1,1)$.

Vậy $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$, $x \in (-1,1)$.

v) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \ldots$, $x \in (-1,1)$.

Xét hàm $f(x) = \ln(1+x)$. Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}.$$

Áp dụng khai triển iv) với $\alpha = -1$ ta được

$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$, $\forall x \in (-1,1)$.

Lấy tích phân từng số hạng trên đoạn $[0,x]$, $x \in (-1,1)$ thì

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2 dt - \ldots + (-1)^n \int_0^x t^n dt + \ldots$$

hay

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \forall x \in (-1,1).$$

6. Ứng dụng của chuỗi

6.1 Tính gần đúng giá trị của hàm tại một điểm

Giả sử ta cần tìm giá trị của hàm $f(x)$ tại điểm x nào đó và $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor trong lân cận của điểm x_0. Khi đó ta có

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Khi $|x - x_0|$ khá bé, ta có công thức gần đúng

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Tuỳ theo độ chính xác mong muốn, ta có thể xác định số các số hạng của biểu thức bên phải.

• **Ví dụ 25** Tính giá trị $\ln 2$ với độ chính xác 0,00001.

Giải Với $-1 < x < 1$, ta có

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \tag{4.5}$$

Chuỗi này hội tụ chậm. Có thể biến đổi để được một chuỗi hội tụ nhanh hơn. Thay x bởi $-x$ vào (4.5) ta có

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots \tag{4.6}$$

Các chuỗi Mac Laurin của $\ln(1 + x)$ và $\ln(1 - x)$ đều hội tụ về các hàm này với $|x| < 1$. Lấy (4.5) trừ (4.6), ta suy ra

$$\ln\frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots\right).$$

Cho $\dfrac{1 + x}{1 - x} = 2$ thì $x = \dfrac{1}{3}$. Do đó

$$\ln 2 \simeq 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{2n+1}}\right).$$

Sai số phạm phải là

$$R_n\left(\frac{1}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2n+3}\cdot\frac{1}{3^{2n+3}} + \frac{1}{2n+5}\cdot\frac{1}{3^{2n+5}} + \ldots\right)$$

$$< \frac{2}{(2n+3)3^{2n+3}}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) < \frac{2.9}{8(2n+3)3^{2n+3}} = \frac{1}{4(2n+3)3^{2n+1}}.$$

Để đạt độ chính xác 0,00001 thì

$$\frac{1}{4(2n+3)3^{2n+1}} < 0{,}00001 \quad \text{hay} \quad 4(2n+3)3^{2n+1} > 10^5.$$

Thử trực tiếp ta thấy $n > 3$. Do đó với $n = 4$ ta có

$$\ln 2 \simeq 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}\right) = 0{,}693144.$$

Vậy $\ln 2 \simeq 0,693144$ với độ chính xác 0,00001.

6.2 Tính gần đúng tích phân xác định

Khi tính tích phân xác định, gặp trường hợp hàm dưới dấu tích phân không có nguyên hàm là hàm sơ cấp thì ta không thể dùng công thức Newton-Leibnitz. Trong trường hợp này ta có thể dùng chuỗi để tính.

- **Ví dụ 26** Tính tích phân $I = \int\limits_0^a e^{-x^2}dx \quad (a > 0)$.

Giải

Ta có

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Thay x bởi $-x^2$ ta được

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\int\limits_0^a e^{-x^2}dx &= \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.3} + \frac{x^5}{2!.5} - \frac{x^7}{3!.7} + \ldots\right)\Bigg|_0^a \\ &= \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1.3} + \frac{a^5}{2!.5} - \frac{a^7}{3!.7} + \ldots\end{aligned}$$

Dùng phương trình trên ta có thể tính tích phân với độ chính xác mong muốn với a bất kì.

Nếu cho $a = \frac{1}{2}$ thì ta có

$$\int\limits_0^{1/2} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{1!3.2^3} + \frac{1}{2!5.2^5} - \frac{1}{3!7.2^7} + \ldots$$

Vế phải là chuỗi đan dấu. Nếu giữ ba số hạng đầu tiên thì sai số tuyệt đối không vượt quá

$$\frac{1}{3!7.2^7} = \frac{1}{5376} < 0,001.$$

Vậy

$$\int\limits_0^{1/2} e^{-x^2}dx \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{2!5.2^5} = 0,4644.$$

với độ chính xác 0,0001.

§7. Chuỗi Fourier [1]

7.1 Chuỗi lượng giác

□ **Định nghĩa 12** Chuỗi lượng giác là chuỗi hàm có dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{4.7}$$

trong đó a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, ... là các hằng số.

△ **Định lí 19** *Với mọi $p, k \in \mathbb{Z}$ ta có các hệ thức*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0\ ; \tag{4.8}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad k \neq 0 \\ 2\pi & \text{nếu} \quad k = 0\ ; \end{cases} \tag{4.9}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin px dx = 0\ ; \tag{4.10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos px dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad k \neq p \\ \pi & \text{nếu} \quad k = p \neq 0\ ; \end{cases} \tag{4.11}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin px dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad k \neq p \\ \pi & \text{nếu} \quad k = p \neq 0. \end{cases} \tag{4.12}$$

7.2 Khai triển Fourier của hàm có chu kì 2π

a) Hệ số Fourier, chuỗi Fourier

Giả sử hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kì 2π, có thể khai triển trên $[-\pi, \pi]$ thành chuỗi lượng giác (4.7). Khi đó ta có thể viết

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{4.13}$$

[1] Fourier (1768 - 1830) : nhà toán học và vật lí người Pháp

Ta tìm sự biểu diễn của a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ qua $f(x)$.

Nếu có thể lấy tích phân từng số hạng của (4.13) trên $[-\pi, \pi]$ và kết hợp các hệ thức (4.8), (4.9) thì ta có

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = \pi a_0.$$

Nhân hai vế của (4.13) với $\cos kx$ $(k = 1, 2, \ldots)$ rồi lấy tích phân của đẳng thức nhận được trên $[-\pi, \pi]$ và kết hợp với (4.10), (4.11) ta được

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi a_k.$$

Nhân hai vế của (4.13) với $\sin kx$ $(k = 1, 2, \ldots)$ rồi lấy tích phân của đẳng thức nhận được trên $[-\pi, \pi]$ và kết hợp với (4.10), (4.12) ta được

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi b_k.$$

Tóm lại, nếu hàm $f(x)$ khai triển được thành chuỗi lượng giác (4.7) trên $[-\pi, \pi]$ thì các hệ số a_0, a_1, a_2, $b_1, b_2, \ldots$ được xác định theo công thức sau

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{4.14}$$

□ **Định nghĩa 13** Các hệ số a_0, a_1, a_2, $b_1, b_2, \ldots$ được xác định theo công thức (4.14) được gọi là *hệ số Fourier* của hàm $f(x)$. Chuỗi lượng giác (4.7) mà các hệ số của nó xác định bởi công thức (4.14) được gọi là *chuỗi Fourier* của hàm $f(x)$.

◇ **Nhận xét** Nếu hàm $f(x)$ khả tích trên đoạn $[-\pi, \pi]$ thì theo trên ta thấy chuỗi Fourier của nó tồn tại. Tuy nhiên chuỗi Fourier của $f(x)$ không nhất thiết hội tụ về $f(x)$. Điều ta quan tâm là khi nào thì $f(x)$ bằng tổng của chuỗi Fourier của nó.

b) Điều kiện đủ để hàm khai triển được thành chuỗi Fourier

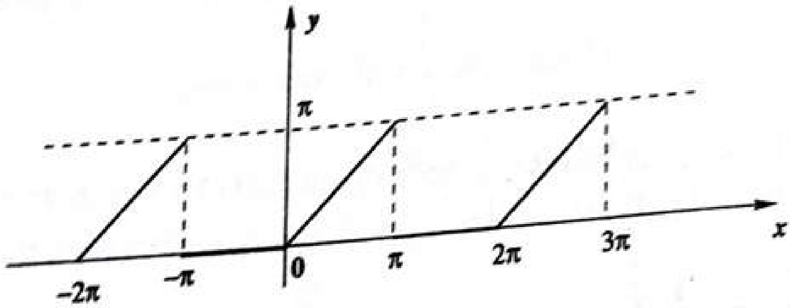
□ **Định nghĩa 14** Hàm $f(x)$ được gọi là đơn điệu từng khúc trên đoạn $[a, b]$ nếu có thể chia $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ sao cho $f(x)$ đơn điệu trên mỗi đoạn nhỏ.

Δ **Định lí 20** (Dirichlet) *Giả sử hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π, bị chặn và đơn điệu từng khúc trên $[-\pi, \pi]$. Khi đó $f(x)$ bằng tổng của chuỗi Fourier của nó tại những điểm mà hàm liên tục. Tại những điểm x_0 mà $f(x)$ gián đoạn, chuỗi Fourier hội tụ về giá trị* $\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\right)$.

• **Ví dụ 27** Khai triển thành chuỗi Fourier hàm tuần hoàn với chu kì 2π xác định như sau

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } -\pi \le x \le 0 \\ x & \text{khi } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Đồ thị của hàm cho bởi hình dưới đây.



Ta có

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_0^{\pi} xdx\right) = \frac{\pi}{2}\ ;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right)$$

$$= \frac{\cos nx}{n^2\pi}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi n^2} & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ 0 & \text{khi } n \text{ chẵn}\ ; \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ -\dfrac{1}{n} & \text{khi } n \text{ chẵn}. \end{cases}$$

Vì vậy

$\int_0^{2\pi} g(x)dx$. Do đó

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x dx = 2\pi\ ;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \sin nx dx = -\frac{2}{n}.$$

Vì vậy

$$f(x) = \pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots\right).$$

Tại $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tổng của chuỗi Fourier $S(x) = \pi$.

7.4 Khai triển Fourier hàm tuần hoàn chu kì khác 2π

Giả sử $f(x)$ tuần hoàn với chu kì $2l$ $(l \neq \pi)$, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-l, l]$. Xét phép đổi biến $t = \frac{\pi}{l}x$. Khi đó $f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = g(t)$, với g là hàm tuần hoàn chu kì 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-\pi, \pi]$ nên g khai triển được thành chuỗi Fourier. Do đó $\frac{t}{2\pi} = \frac{x}{2l}$

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

hay

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

trong đó

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx.$$

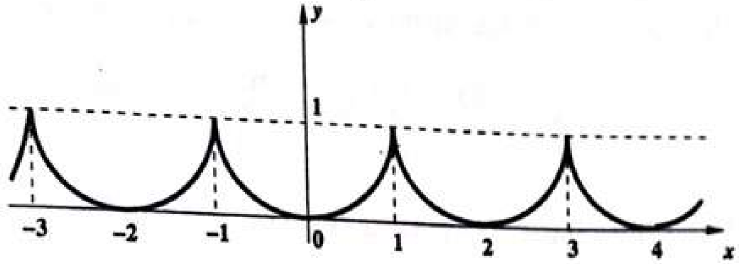
Tương tự,

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\ ;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

• **Ví dụ 29** Khai triển thành chuỗi Fourier hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kì 2, biết rằng $f(x) = x^2$ với $x \in [-1, 1]$.

Đồ thị của hàm cho bởi hình dưới đây.



Vì $f(x)$ là hàm chẵn nên $b_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ta có

$$a_0 = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3};$$

$$a_n = 2\int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx = (-1)^2 \frac{4}{n^2\pi^2}\ (n = 1, 2, \ldots).$$

Vậy

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\cos \pi x}{1^2} - \frac{\cos 2\pi x}{2^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} - \ldots\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

7.5 Khai triển Fourier hàm xác định trên một đoạn [a, b]

Giả sử $f(x)$ là hàm xác định và đơn điệu từng khúc trên $[a, b]$. Để khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier ta xây dựng một hàm tuần hoàn $g(x)$ có chu kì $2l \geq b - a$ sao cho

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Nếu $g(x)$ có thể khai triển thành chuỗi Fourier thì tổng $S(x)$ của chuỗi đó bằng $f(x)$ tại mọi $x \in [a, b]$, trừ tại những điểm gián đoạn của hàm $f(x)$. Như vậy, ta khai triển được hàm $f(x)$ thành chuỗi Fourier trên $[a, b]$.

Trường hợp đặc biệt, khi hàm $f(x)$ xác định và đơn điệu từng khúc trên $[0, l]$ thì ta xác định thêm hàm đó trên $[-l, 0]$ với yêu cầu đảm bảo tính đơn điệu từng khúc. Khi đó ta được hàm mở rộng $g(x)$ của $f(x)$ trên $[-l, l]$.

* Nếu đặt $f(x) = f(-x)$ với mọi $x \in [-l, 0]$ thì hàm mở rộng $g(x)$ là hàm chẵn. Ta nói $g(x)$ là kéo dài chẵn của $f(x)$. Khi đó khai triển Fourier của $g(x)$ có dạng

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

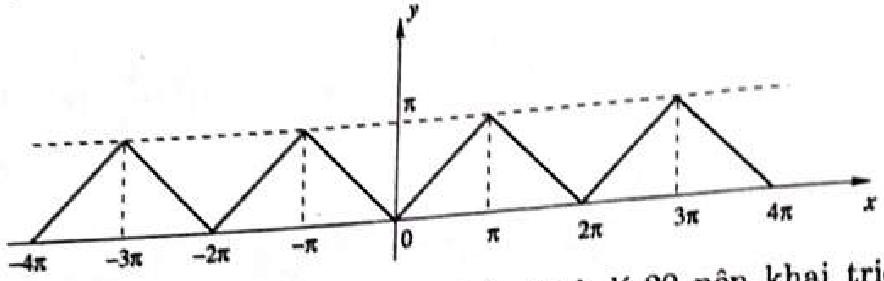
* Nếu đặt $f(x) = -f(-x)$ với mọi $x \in [-l, 0]$ thì $g(x)$ là hàm lẻ. Ta nói $g(x)$ là kéo dài lẻ của $f(x)$. Khai triển Fourier của $g(x)$ có dạng

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

• **Ví dụ 30** Khai triển hàm $f(x) = x$ xác định trên $[0, \pi]$ thành chuỗi Fourier theo cosin.

Giải

Để có chuỗi Fourier theo cosin, ta mở rộng $f(x)$ thành hàm chẵn $g(x) = |x|$ trên $[-\pi, \pi]$. Đồ thị của $g(x)$ là một đường gấp khúc.



Hàm $g(x)$ thoả mãn các điều kiện của định lí 20 nên khai triển được thành chuỗi Fourier. Vì $g(x)$ là hàm chẵn nên $b_n = 0$ và có

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi\ ;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = -\frac{2}{\pi n^2}(1 - \cos n\pi).$$

Ta được $a_1 = -\frac{4}{\pi}$, $a_2 = 0$, $a_3 = -\frac{4}{3^2\pi}$, $a_4 = 0, \ldots$

Do đó

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\right).$$

Vậy trên $[0, \pi]$ ta có

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\right).$$

Bài tập

1. Tìm số hạng tổng quát của các chuỗi số sau:

Bài tập

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \dots$;

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \dots$;

c) $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \dots$;

d) $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \dots$;

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^2 + \left(\frac{5}{15}\right)^2 + \dots$.

2. Dùng định nghĩa chứng minh các chuỗi số sau hội tụ và tính tổng của chúng:

a) $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \dots$;

b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots$;

c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots$;

d) $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$;

f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$;

g) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$.

3. Cho biết $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Tính $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

4. Xét xem các chuỗi sau hội tụ hay phân kì:

a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{4}{11} + \dots$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n.\arctan\frac{1}{n}$.

5. Dùng dấu hiệu so sánh, xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tan \frac{\pi}{4n}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$; h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^2$; j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - 1}{(e^n+1)^2}$;

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$; l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2+3}$.

6. Dùng tiêu chuẩn D'Alembert hoặc Cauchy, xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{3^n.n!}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2})\ldots(\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{n^2}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n.(n!)^2}{(2n)!}$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$;

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$; i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$; k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}.3^n}$;

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

7. Dùng tiêu chuẩn tích phân Cauchy, xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$;

b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$.

8. Xét sự hội tụ của chuỗi đan dấu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$.

9. Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của các chuỗi số sau:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{6n-5}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!)}{n\sqrt{n}}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$.

10. Chứng minh rằng chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{x^4 + n^2}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

11. Tìm miền hội tụ, hội tụ tuyệt đối của các chuỗi hàm sau:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$.

12. Tìm miền hội tụ của các chuỗi luỹ thừa sau:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+3^n}$; d) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n3^n\ln n}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$; f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^n}(x-3)^n$; h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$.

13. Tìm miền hội tụ của các chuỗi luỹ thừa suy rộng sau:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x+2)^n}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$.

14. Tính tổng của các chuỗi hàm sau:

a) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$;

b) $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$;

c) $\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}+\ldots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\ldots$;

d) $1.2x+2.3x^2+3.4x^3+\ldots+$;

e) $x-4x^2+9x^3-16x^4+\ldots$.

15. Khai triển Taylor hàm $f(x)=\frac{1}{x}$ ở lân cận điểm $x=1$.

16. Khai triển các hàm sau thành chuỗi Mac Laurin:

a) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$; b) $f(x)=\sin^2 x$;

c) $f(x)=x\ln(1+x^2)$; d) $f(x)=x^2e^x$.

17. Khai triển các hàm sau thành chuỗi Fourier:

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{nếu } 0 \leq x < \pi \end{cases}$;

b) $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ trên $(0, 2\pi)$;

c) $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$ trên $[0, 2]$, $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2 ;

18. Khai triển hàm $f(x) = x^2$ thành chuỗi Fourier

a) theo các hàm số cosin ;

b) theo các hàm số sin ;

c) trong khoảng $(0, 2\pi)$.

Sử dụng các khai triển trên, tính tổng các chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

▶ Hướng dẫn và đáp số bài tập chương 4

1. a) $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$; b) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$; c) $u_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$;

d) $u_n = \dfrac{2n}{3n+2}$; e) $u_n = \left(\dfrac{n+1}{4n-1}\right)^2$.

2. a) $s_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right) \to s = \dfrac{1}{2}$; b) $s = \dfrac{4}{3}$; c) $s = \dfrac{3}{2}$;

d) $s = 1$; e) $s = 1 - \sqrt{2}$;

f) $s_n = -\ln 2 + \ln \dfrac{n+2}{n-1} \to s = -\ln 2$; g) $s = \frac{3}{2}$.

3. $\dfrac{\pi^2}{8}$.

4. a) Phân kì vì $u_n = \dfrac{n}{3n-1} \nrightarrow 0$; b) Phân kì vì $u_n \to 1$.

5. a) Phân kì ; b) Hội tụ ; c) Phân kì ; d) Hội tụ ; e) Hội tụ ;

f) Phân kì ; g) Phân kì ; h) Hội tụ ; i) Hội tụ ; j) Hội tụ ;
k) Hội tụ ; l) Hội tụ.

6. a) Hội tụ ; b) Hội tụ ; c) Hội tụ ; d) Phân kì ; e) Hội tụ ;
f) Hội tụ ; g) Phân kì ; h) Phân kì ; i) Phân kì ; j) Hội tụ ;
k) Phân kì ; l) Hội tụ.

7. a) Hội tụ ; b) Phân kì ; c) Hội tụ.

8. a) Hội tụ (nhưng không hội tụ tuyệt đối) ;
b) Hội tụ (nhưng không hội tụ tuyệt đối) ; c) Hội tụ.

9. a) Bán hội tụ ; b) Phân kì ; c) Bán hội tụ với mọi $x \neq -n$;
d) Hội tụ tuyệt đối ; e) Hội tụ tuyệt đối ;
f) Hội tụ tuyệt đối với $0 < x < \frac{\pi}{4}$, phân kì với $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ và bán hội tụ khi $x = \frac{\pi}{4}$.

11. a) $\{0\}$ hội tụ tuyệt đối ; b) $(0, +\infty)$ hội tụ tuyệt đối ;
c) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ hội tụ tuyệt đối ;
d) $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$ hội tụ tuyệt đối ;
e) $x > e$ hội tụ tuyệt đối, $1 < x < e$ bán hội tụ; f) $x > 0$.

12. a) $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$; b) $(-\infty, +\infty)$; c) $(-3, 3)$; d) $[-3, 3)$;
e) $(-1, 1)$; f) $(-4, 4)$; g) $(1, 5]$; h) $[0, 2)$;

13. a) $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$; b) $(0, +\infty)$; c) $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

d) $(-1, +\infty)$.

14. a) $S(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ $(-1 < x < 1)$;

b) $S(x) = \arctan x$ $(-1 < x < 1)$;

c) $S(x) = 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x)$ $(-1 < x < 1)$;

d) $S(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$ $(-1 < x < 1)$;

e) $S(x) = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$ $(-1 < x < 1)$.