Chương I ĐẠI SỐ VECTƠ & PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

§1. VECTƠ - CỘNG VECTƠ -NHÂN VECTƠ VỚI MỘT SỐ

1.Đoạn thẳng định hướng

Một đoạn thẳng gọi là định hướng nếu trong hai điểm mút của nó ta chọn một điểm làm điểm gốc, còn điểm kia làm điểm ngọn.

Ví dụ: Đoạn thẳng AB, nếu ta chọn A là điểm gốc, B là điểm ngọn thì ta có một đoạn thẳng định hướng AB. K*ý hiệu*: (A, B).

Nếu hai điểm A,B trùng nhau khi đó ta có đoạn thẳng định hướng (A,A).

Hai đoạn thẳng định hướng (A,B) và (C,D) gọi là bằng nhau nếu trung điểm của AD và BC trùng nhau. Khi đó ta viết (A,B) = (C,D).

Dễ dàng thấy rằng quan hệ bằng nhau giữa các đoạn thẳng định hướng là một quan hệ tương đương.

2.Vectơ

Vectơ là một đoạn thẳng định hướng trong không gian bằng một đoạn thẳng định hướng (A,B) cho trước. K*ý hiệu*: $\overrightarrow{AB}$.

Đường thẳng AB được gọi là giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Modul của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là độ dài đoạn thẳng AB. *Ký hiệu*: $|\overrightarrow{AB}|$.

Như vậy nếu (A,B) = (C,D) thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Một vectơ cũng có thể ký hiệu một cách đơn giản là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$,... các vectơ đó gọi là vectơ tự do.

Tập hợp tất cả các vectơ trong không gian được gọi là không gian các vectơ tự do $\mathbf{V_3}$.

Vectơ không là vectơ có điểm gốc và điểm ngọn trùng nhau và *ký hiệu*: $\vec{0}$.

Hiển nhiên $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right|$, $\left|\overrightarrow{AA}\right| = 0$

Vectơ có modul bằng 1 được gọi là vectơ đơn vị, thường *ký hiệu*: $\vec{e}$.

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ khác vectơ không gọi là cùng phương (cộng tuyến) nếu hai đường thẳng AB và CD song song hoặc trùng nhau.

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ khác vectơ không gọi là cùng hướng khi ta tịnh tiến gốc trùng nhau thì ta có điểm ngọn nằm về cùng một phía.

Như vậy hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và có modul bằng nhau.

3.Phép cộng các vectơ

3.1.Định nghĩa

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tuỳ ý. Ta xác định một vectơ, *ký hiệu* là $\vec{a} + \vec{b}$, và gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ xác định như sau: lấy một điểm A tùy ý xác định vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, khi đó $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Rõ ràng định nghĩa trên không phụ thuộc vào việc chọn vị trí điểm A.

3.2.Tính chất

1^o. Với ba điểm A,B,C bất kỳ ta luôn có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}$.

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ **,** $\vec{c}$ ta luôn có:

2^o. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$**.**

3^o. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

4^o. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

5^o. Với mọi vectơ $\vec{a}$ ta luôn có $\vec{x}$ sao cho: $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$. Vectơ $\vec{x}$ được gọi là vectơ đối của $\vec{a}$ và *ký hiệu* : $-\vec{a}$.

4.Phép trừ hai vectơ

4.1.Định nghĩa

Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được định nghĩa là tổng của vectơ $\vec{a}$ với vectơ $-\vec{b}$ **,** và *ký hiệu* là $\vec{a} - \vec{b}$**.** Như vậy: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$**.**

4.2.Tính chất

Với ba điểm A,B,C bất kỳ ta luôn c: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

Để có vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ ta có thể xây dựng như sau: lấy một điểm A tuỳ ý xác định vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ khi đó $\overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}$**.**

5.Phép nhân vectơ với một số thực

5.1.Định nghĩa

Cho vectơ $\vec{b}$ và số thực λ . Tích của số thực λ và vectơ $\vec{b}$ là một vectơ $\vec{a}$. *Ký hiệu*: $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ được xác định:

1^0. $|\vec{a}| = |\lambda\vec{b}| = |\lambda|.|\vec{b}|$

2^0. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng khi $\lambda > 0$; $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng khi $\lambda < 0$.

5.2.Tính chất

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ **,** $\vec{c}$; với mọi số thực λ, μ ta luôn có:

1^o. $0.\vec{b} = \vec{0}$.

2^o. $1.\vec{b} = \vec{b}$ và $(-1).\vec{b} = -\vec{b}$.

3^o. $\lambda(\mu\vec{b}) = (\lambda.\mu)\vec{b}$**.**

4^o. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda.\vec{a} + \lambda\vec{b}$**.**

5^o. $(\lambda + \mu)\vec{b} = \lambda.\vec{b} + \mu.\vec{b}$.

6^o. Điều kiện để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại một số thực λ sao cho: $\vec{a} = \lambda\vec{b}$**.**

§2. SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH – PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH
CƠ SỞ- SỐ CHIỀU

1.Định nghĩa

Hệ vectơ $\{\vec{a}_i\}_{1,k}$ được gọi là hệ vectơ độc lập tuyến tính nếu có đẳng thức: $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\vec{a}_i = \vec{0}$ (*) ta suy ra $\lambda_i = 0$ với mọi $i = 1,...,k$.

Hệ vectơ không độc lập tuyến tính gọi là hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính. Nghĩa là từ biểu thức (*) ta suy ra tồn tại $\lambda_i \neq 0$.

2.Tính chất

1^o.Mọi hệ có chứa vectơ không $\vec{0}$ đều là hệ phụ thuộc tuyến tính .

2^o. Hệ vectơ $\{\vec{a}_i\}_{1,k}$ là phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow$ nếu tồn tại một vectơ trong hệ được biểu thị qua các vectơ còn lại.

3^o.Hệ vectơ con của hệ vectơ độc lập tuyến tính là hệ vectơ độc lập tuyến tính.

4^o.Hệ vectơ chứa hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính là hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính.

5^o.Cho hệ vectơ $\{\vec{a}_i\}_{1,k}$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính, nếu hệ vectơ $\{\vec{a}_i,\vec{b}\}_{1,k}$ là hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính thì vectơ $\vec{b}$ được biểu thị qua hệ vectơ $\{\vec{a}_i\}_{1,k}$.

Chú ý:

+ Hệ $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ phụ thuộc tuyến tính khi giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

+ Hệ $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ phụ thuộc tuyến tính (hay gọi là đồng phẳng) nếu giá của chúng cùng song song hoặc cùng nằm trong một mặt phẳng nào đó.

3.Định nghĩa

1^0.Cho một vectơ $\vec{a}$ khác vectơ không. Tập hợp tất cả các vectơ $\vec{b}$ sao cho hệ vectơ $\{\vec{a},\vec{b}\}$ phụ thuộc tuyến tính gọi là không gian vectơ một chiều sinh bởi vectơ $\vec{a}$.

K*ý hiệu* : $V_1 = L<\{\vec{a}\}>$, tức $V_1 = \{\vec{b} \mid \vec{b} = x\vec{a}\}$. Khi đó

$\{\vec{a}\}$ là một cơ sở của không gian vectơ V_1

(x) là tọa độ của vectơ $\vec{b}$ đối với cơ sở $\{\vec{a}\}$ và k*ý hiệu*: $\vec{b}=(x)$

2^0.Cho hệ vectơ $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ độc lập tuyến tính. Tập hợp tất cả các vectơ $\vec{c}$ sao cho hệ vectơ $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ phụ thuộc tuyến tính được gọi là không gian vectơ hai chiều sinh bởi hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ký hiệu : $V_2 = L<\{\vec{a}, \vec{b}\}>$, tức $V_2 = \{\vec{c}: \vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}\}$. Khi đó

$\{\vec{a}, \vec{b}\}$ là cơ sở của không gian V_2

(x, y) là tọa độ của vectơ $\vec{c}$ đối với cơ sở $\{\vec{a},\vec{b}\}$ và *ký hiệu* là $\vec{c} = (x, y)$.

3^0. Cho $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ độc lập tuyến tính không gian các vectơ tự do $\mathbf{V_3}$ được sinh ra bởi hệ $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ là tập hợp các vectơ $\vec{d}$ sao cho $\vec{d} = x.\vec{a} + y.\vec{b} + z.\vec{c}$.

Ký hiệu: $\mathbf{V_3} = L<\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}>$, tức $V_3 = \{\vec{d} \mid \vec{d} = x.\vec{a} + y.\vec{b} + z.\vec{c}\}$. Khi đó

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ là một cơsở của $\mathbf{V_3}$

(x,y,z) là tọa độ của vectơ $\vec{d}$ đối với cơ sở $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ và *ký hiệu* $\vec{d}$ =(x,y,z)

§3. TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG

1.Tích vô hướng

1.1.Định nghĩa

Tích vô hướng của 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là một số thực. *Ký hiệu:* $\vec{a}.\vec{b}$ và $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$

1.2.Một số tính chất của tích vô hướng

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; với $\lambda \in R$ ta luôn có:

1°. $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

2°. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$

3°. $\lambda(\vec{a}.\vec{b}) = (\lambda\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.(\lambda\vec{b})$

4°. $\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $\vec{a} = \vec{0}$.

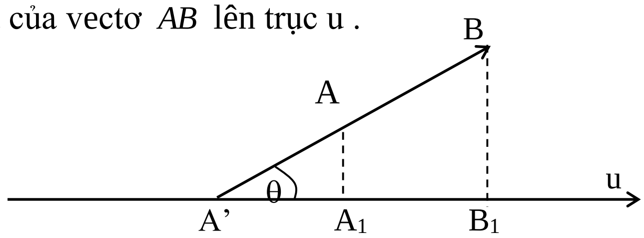
5°. $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow (\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ tức $\vec{a} \perp \vec{b}$

2. Chiếu vectơ lên một trục

2.1.Định nghĩa

Cho vectơ $\overrightarrow{AB}$ và một trục u. Gọi A_1, B_1 là hình chiếu của A, B lên trục u, khi đó $\overline{A_1B_1}$ được gọi là chiếu của vectơ $\overrightarrow{AB}$ lên trục u .

Ký hiệu: $ch_u\overrightarrow{AB}$



2.2. Tính chất

1°. $ch_u\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta$, với θ là góc tạo bởi trục u và vectơ $\overrightarrow{AB}$.

2°. Nếu hai trục u và v cùng hướng th $ch_u\vec{a} = ch_v\vec{a}$

3^0. Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ th $ch_u\vec{a} = ch_u\vec{b}$

4^0. Với mọi $\vec{a}$ với mọi số thực λ: $ch_u\lambda\vec{a} = \lambda ch_u\vec{a}$

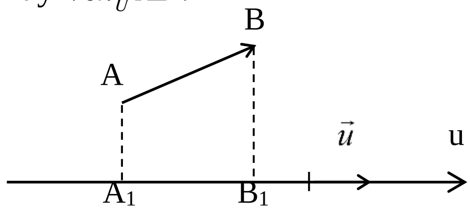
5^0. Với mọi $\vec{a}, \vec{b}$: $ch_u(\vec{a}+\vec{b}) = ch_u\vec{a} + ch_u\vec{b}$.

6°. Với mọi $\vec{a}, \vec{b}$: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.ch_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|ch_{\vec{b}}\vec{a}$.

3. Hình chiếu của vectơ lên trục

3.1.Định nghĩa

Hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{AB}$ lên trục u là vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ và được gọi là vectơ chiếu của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên trục u. *Ký hiệu*: $proj_u\overrightarrow{AB}$, $proj_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}$ hay $Vch_{\vec{U}}\overrightarrow{AB}$.



3.2.Cùng thức

$$proj_{\vec{u}}\overrightarrow{AB} = \overline{A_1B_1}\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\vec{u}.\vec{u}}\right).\vec{u}$$

3.3.Tính chất

1^o. Nếu hai trục u và v cùng hướng th $proj_u\vec{a} = proj_v\vec{a}$

2^0. Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ th $proj_u\vec{a} = proj_u\vec{b}$

3^0. Với mọi $\vec{a}$ với mọi số thực λ : $proj_u\lambda\vec{a} = \lambda\, proj_u\vec{a}$

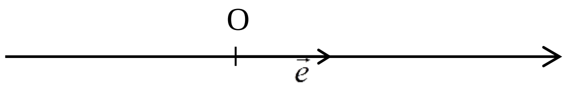
4^0. Với mọi $\vec{a}, \vec{b}$: $proj_u(\vec{a}+\vec{b}) = proj_u\vec{a} + proj_u\vec{b}$.

§4. HỆ TỌA ĐỘ DESCARTES VUÔNG GÓC

1.Trục tọa độ

1.1.Định nghĩa

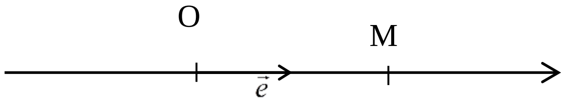
Trục tọa độ là một trục mà trên đó có một điểm gốc O, và vectơ chỉ hướng đơn vị $\vec{e}$. Ta thường dùng là trục Ox



Ký hiệu : (Ox, $\vec{e}$).

1.2.Tọa độ của một điểm trên trục tọa độ

Nếu có điểm M trên hệ trục tọa độ (Ox, $\vec{e}$) và $\overrightarrow{OM} = x.\vec{e}$ th x được gọi là tọa độ của điểm M trên trục Ox. *Ký hiệu:* M(x).

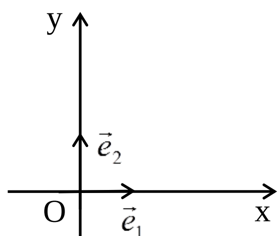


Trên trục Ox điểm $M_1(x_1)$ và $M_2(x_2)$ thì $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)$

2. Hệ tọa độ Descartes (Decac) vuông góc trong mặt phẳng

2.1.Định nghĩa

Hệ tọa độ Descartes vuông góc trong mặt phẳng là một hệ gồm hai trục (Ox, $\vec{e}_1$) và (Oy, $\vec{e}_2$) vuông góc, trong đó $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ là hai vectơ đơn vị chỉ hướng tương ứng của hai trục Ox, Oy.

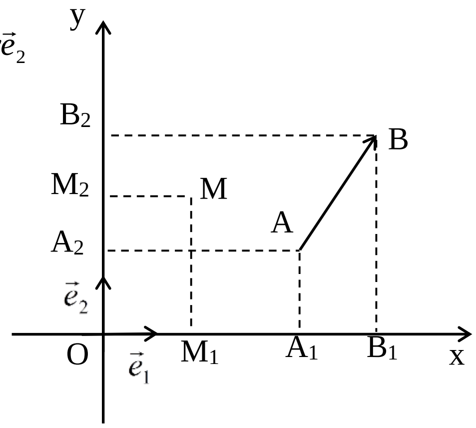


Ký hiệu: Oxy

Và ta cũng gọi hệ $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ là hệ tọa độ Descartes vuông góc trong mặt phẳng. Trong đó O là một điểm thuộc mặt phẳng và $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ là hai vectơ đơn vị vuông góc với nhau .

Dễ dàng thấy rằng tập hợp tất cả các vectơ trong mặt phẳng Oxy là không gian vectơ sinh bởi hai vec tơ $\vec{e}_1, \vec{e}_2$; tức là nhận hệ vectơ$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$làm một cơ sở.

2.2.Tọa độ của một điểm



Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M, nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ th ta gọi bộ số (x,y) là tọa độ của điểm M. *Ký hiệu* M (x,y).

Ta có thể xác định tọa độ của điểm M trong mặt phẳng Oxy bằng cách trực quan như sau:
Ta kẻ qua M hai đường thẳng tương ứng cùng phương với hai trục Ox, Oy chúng lần lượt cắt hai trục này tại M_1, M_2.
Khi đó : $\overline{OM_1} = x$; $\overline{OM_2} = y$.
Trong hệ Oxy giả sử $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$ thì $\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1, y_2-y_1)$.

2.3.Góc định hướng giữa hai vectơ

Trong mặt phẳng Oxy cho hai vec tơ: $\vec{u} = (a_1, a_2)$, $\vec{v} = (b_1,b_2)$.

Nếu định thức $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} > 0$ thì cặp vectơ $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ gọi là có hướng dương.

Nếu định thức $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} < 0$ thì cặp vectơ $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ gọi là có hướng âm.

Ta biết rằng góc φ góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ được tính bởi biểu thức:

$$\cos\varphi = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}} \qquad 0 \le \varphi \le \pi .$$

Ta định nghĩa góc định hướng giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, *ký hiệu* $<(\vec{u}, \vec{v})$ như sau:

+ Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ không cùng phương thì

$<(\vec{u}, \vec{v}) = \varphi + 2k\pi$ nếu $\vec{u}, \vec{v}$ là cặp vectơ có hướng dương.

$<(\vec{u}, \vec{v}) = -\varphi + 2k\pi$ nếu $\vec{u}, \vec{v}$ là cặp vectơ có hướng âm.

+ Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương thì

$<(\vec{u}, \vec{v}) = 0 + 2k\pi$ nếu $\vec{u}, \vec{v}$ cùng chiều .

$<(\vec{u}, \vec{v}) = \pi + 2k\pi$ nếu $\vec{u}, \vec{v}$ ngược chiều .

Rõ ràng theo định nghĩa $<(\vec{u}, \vec{v}) = -<(\vec{v}, \vec{u})$.

Dễ dàng chứng minh được:

$$\cos<(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}}$$

$$\sin<(\vec{u},\vec{v}) = \frac{a_1.b_2 - a_2.b_1}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}}$$

2.4.Công thức đổi tọa độ

Trong mặt phẳng cho hai hệ toa độ Oxy và O'x'y' với $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ là hai vectơ đơn vị tương ứng của hai trục Ox, Oy và $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ là hai vectơ đơn vị tương ứng của hai trục O'x', O'y'.

Giả sử M , $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$, O' có tọa độ lần lượt đối với hệ tọa độ Oxy là (x,y); (a,a'); (b,b'); (c,c') và M có tọa độ đối với hệ O'x'y' là (x',y').

Khi đó ta có : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

$$\Leftrightarrow \quad x.\vec{e}_1 + y.\vec{e}_2 = c.\vec{e}_1 + c'.\vec{e}_2 + x'.\vec{e}'_1 + y'.\vec{e}'_2$$

$$\Leftrightarrow \quad x.\vec{e}_1 + y.\vec{e}_2 = c.\vec{e}_1 + c'.\vec{e}_2 + x'(a.\vec{e}_1 + a'.\vec{e}_2) + y'(b.\vec{e}_1 + b'.\vec{e}_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a.x' + b.y' + c \\ y = a'.x' + b'.y' + c' \end{cases}$$

Xet ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$

Từ đóiều kiện: $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$; $\vec{e}_1.\vec{e}_2 = 0$, ta suy ra:

$$\begin{cases} a^2 + a'^2 = 1 \quad (1) \\ b^2 + b'^2 = 1 \quad (2) \\ a.b + a'.b' = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra tồn tại các góc φ, θ sao cho: a = sinφ , a' = cosφ , b = sinθ , b' = cosθ .

Thay các giá trị này vào (3) ta được:

(3) ⇔ cosφ .sinθ + sinφ.cosθ = 0 ⇔ Sin(φ + θ) = 0

⇔ Hoặc φ + θ = 2kπ hoặc φ + θ = π + 2kπ .

Trường hợp 1: φ + θ = 2kπ ⇔ θ = - φ + 2kπ

Khi đó b = sinθ = -sinφ, b' = cosθ = cosφ nên ma trận A có dạng

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$, ch ý rằng khi đó detA = 1.

Trường hợp 2: φ + θ = π + 2kπ ⇔ θ = -φ + π + 2kπ

Khi đó b = sinθ = sinφ, b' = cosθ = - cosφ nên ma trận A có dạng :

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}$$, ch ý rằng khi đó detA = -1 .

Tóm lại định thức của matrận phép biến đổi tọa độ Descartes vuông góc luôn luôn có giá trị bằng 1 hoặc -1. Ma trận A cũng được gọi là ma trận trực giao cấp 2.

2.5.Một số phép biến đổi thường dùng trong mặt phẳng

1^0.Phép tịnh tiến (Công thức đổi trục)

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm O’(x_0, y_0) /Oxy và O’XY là hệ toạ độ Descartes có cùng vectơ đơn vị với Oxy, khi đó cùng thức toạ độ từ Oxy sang O’XY là:

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

2^0.Phép quay

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy khi quay trục Ox quanh O góc α (α là góc định hướng) ta được hệ trục tọa độ Descartes mới là Ox’y’ khi đó ta có phương đổi trục qua phép quay là:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

3^0.Phép co có phương trình: $\begin{cases} X = x \\ Y = ky \end{cases}$, $k > 0$, tức là co đường cong trong mặt phẳng Oxy về trục Ox theo một tỷ số k.

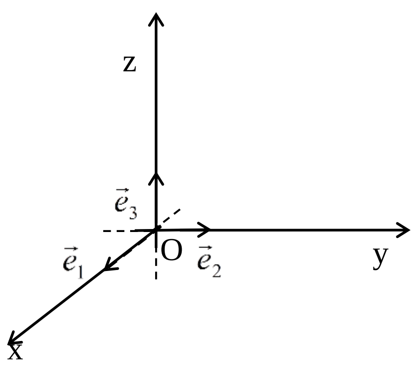
3.Hệ tọa độ Descartes vuông góc trong không gian

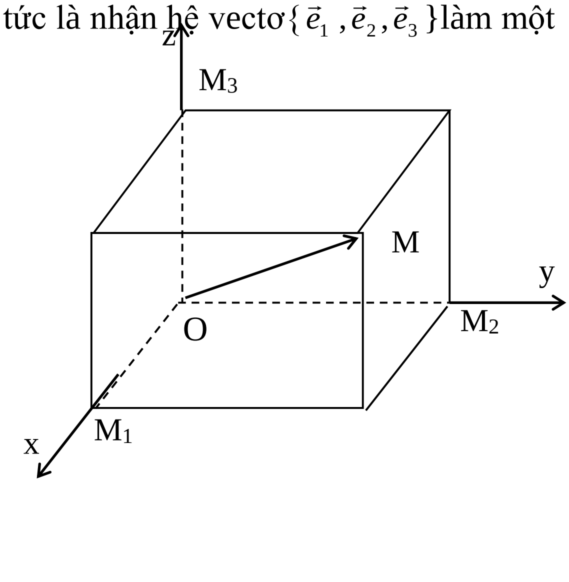
3.1.Định nghĩa

Hệ tọa độ Descartes vuông góc trong không gian là một hệ gồm ba trục (Ox, $\vec{e}_1$) ; (Oy, $\vec{e}_2$); (Oz, $\vec{e}_3$) vuông góc với nhau từng đói một, trong đó $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ là ba vectơ đơn vị chỉ hướng tương ứng của ba trục Ox, Oy, Oz sao cho theo thứ tự đó ba vectơ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ lập thành một tam diện thuận. *Ký hiệu*: Oxyz.

Đôi khi ta cũng gọi hệ $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ là hệ tọa độ Descartes vuông góc trong không gian, trong đó O là một điểm thuộc không gian và $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ là ba vectơ đơn vị vuông góc với nhau và lập thành một tam diện thuận.

Dễ dàng thấy rằng tập hợp tất cả các vectơ trong không gian Oxyz (tức là **V_3**) là không gian vectơ sinh bởi hai vec tơ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$; tức là nhận hệ vectơ$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$làm một cơ sở.





3.2.Tọa độ của một điểm M

Trong không gian Oxyz cho điểm M, nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ thì ta gọi bộ số (x,y,z) là tọa độ của điểm M. *Ký hiệu:* M (x,y,z).

Ta có thể xác định tọa độ của điểm M trong không gian Oxyz bằng cách trực quan như sau: Ta kẻ qua M ba mặt phẳng tương ứng cùng phương với các mặt phẳng Oxy, Oyz, Ozx và cắt các trục tọa độ Ox tại M_1, Oy tại M_2, Oz tại M_3. Khi đó

$\overline{OM_1} = x$; $\overline{OM_2} = y$; $\overline{OM_3} = z$.

Nếu A(x_1, y_1, z_1) và B(x_2, y_2, z_2) thì $\overrightarrow{AB}$ = ($x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$).

3.3.Công thức đổi tọa độ

Trong không gian cho hai hệ toa độ Oxyz và O'x'y'z' với $\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3$ là ba vectơ đơn vị tương ứng của ba trục Ox, Oy,Oz và $\vec{e}'_1 , \vec{e}'_2 , \vec{e}'_3$ là ba vectơ đơn vị tương ứng của ba trục O'x', O'y', O'z'.

Giả sử M, $\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3$, O' có tọa độ lần lượt đối với hệ tọa độ Oxyz là (x,y,z); (a,a',a''); (b,b',b''); (c,c',c''); (d,d',d'') và M có tọa độ đối với hệ O'x'y'z' là (x',y',z').

Khi đó ta có: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

$\Leftrightarrow x.\vec{e}_1 + y.\vec{e}_2 + z.\vec{e}_3 = d.\vec{e}_1 + d'.\vec{e}_2 + d''.\vec{e}_3 + x'.\vec{e}'_1 + y'.\vec{e}'_2 + z'.\vec{e}_3$

$\Leftrightarrow x.\vec{e}_1 + y.\vec{e}_2 + z.\vec{e}_3 = d.\vec{e}_1 + d'.\vec{e}_2 + d''.\vec{e}_3 + x'(a.\vec{e}_1 + a'.\vec{e}_2 + a''.\vec{e}_3) + y'(b.\vec{e}_1 + b'.\vec{e}_2 + b''.\vec{e}_3) + z'(c.\vec{e}_1 + c'.\vec{e}_2 + c''.\vec{e}_3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a.x' + b.y' + c.z' + d \\ y = a'.x' + b'.y' + c'.z' + d' \\ z = a''.x' + b''.y' + c''.z' + d'' \end{cases}$$

Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$ Ta cũng chứng minh được định thức của A cũng bằng 1 hoặc -1, tức là A là ma trận trực giao cấp 3.

§5 TÍCH VECTƠ -TÍCH HỖN TẠP - TICH KEP

1.Tích có hướng (tích vectơ) của hai vectơ

1.1.Định nghĩa

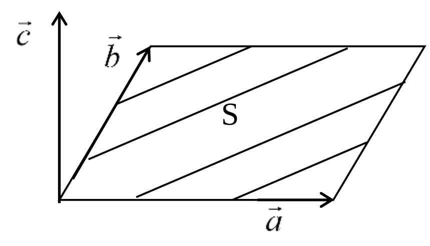
Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$,$\vec{b}$ là một vectơ $\vec{c}$ được *Ký hiệu*: $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ hoặc $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ và vectơ $\vec{c}$ xác định như sau:

+ $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$

+ Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$ sắp xếp theo thứ tự đó tạo thành một tam diện thuận

+ $|\vec{c}| = |\vec{a}|.|\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

Nếu hai vectơ $\vec{a}$,$\vec{b}$ cùng phương thì



tích có hướng của chúng được định nghĩa là vectơ không.

1.2.Ý nghĩa hình học

Modul của vectơ tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương bằng diện tích hình bình hành dựng trên 2 vectơ đó.

1.3.Một số tính chất

1º. $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương

Thật vậy, nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì theo định nghĩa $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$.

Ngược lại, nếu $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$, ta giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương thì hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ đều khác vectơ không và góc giữa chúng $(\vec{a}, \vec{b})$ khác 0 và π, bởi vậy: $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$. Do đó : $\vec{a} \wedge \vec{b} \neq \vec{0}$ (mâu thuẫn). Vậy hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.

2º. $\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$. Hiển nhiên.

3º. $\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \wedge \vec{b}$ (*) và $\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \wedge (\lambda\vec{b})$ (**).

Ta chứng minh (*) :

Nếu $\lambda = 0$ hoặc hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương thì cả hai vế của (*) đều bằng 0, do đó (*) đúng.

Ta giả sử $\lambda \neq 0$ và hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương.

Ta có: $|\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})| = |\lambda||\vec{a}|.|\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b})$.

Nếu $\lambda > 0$ thì $|(\lambda\vec{a}) \wedge \vec{b}| = |\lambda\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda|\vec{a}|.|\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})|$.

Nếu $\lambda < 0$ thì $|(\lambda\vec{a}) \wedge \vec{b}| = |\lambda\vec{a}||\vec{b}|\sin(\pi - (\vec{a}, \vec{b})) = |\lambda||\vec{a}|.|\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b}) =$

$|\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})|$.

Như vậy hai vectơ hai vế của (*) có modun bằng nhau.

Chúng cùng phương vì cùng vuông góc với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Nếu $\lambda > 0$ thì chúng đều cùng hướng với $\vec{a} \wedge \vec{b}$, nếu $\lambda > 0$ thì chúng đều ngược hướng với $\vec{a} \wedge \vec{b}$ nên chúng cũng cùng hướng.

Tóm lại đẳng thức (*) được chứng minh.

Việc chứng minh tính chất(**) dề dàng chứng minh dựa vào tính chất (*) và 2º.

4º. $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \wedge \vec{c}) + (\vec{b} \wedge \vec{c})$ (***)

$\vec{c} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{c} \wedge \vec{a}) + (\vec{c} \wedge \vec{b})$ (****)

Ta chứng minh tính chất (***) .

Nếu có một trong ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là vectơ không thì hiển nhiển (***) đúng .

Giả sử ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác vectơ không, và gọi $\vec{c}_0 = \dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$, tức $\vec{c}_0$ là vectơ đơn vị cùng hướng với vectơ $\vec{c}$.

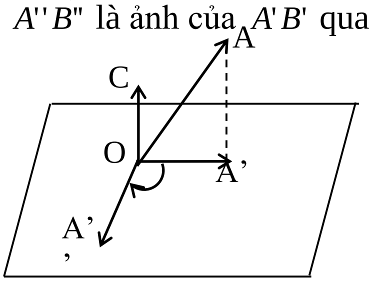
Trước hết ta chứng minh rằng: $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c}_0 = (\vec{a} \wedge \vec{c}_0) + (\vec{b} \wedge \vec{c}_0)$.

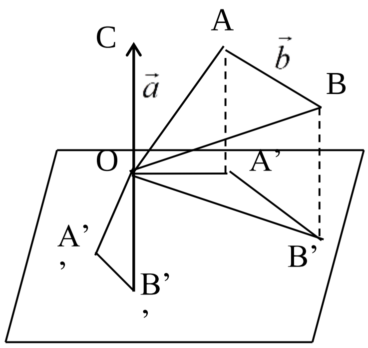
Thậy vậy, từ một điểm O ta đặt các vectơ : $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}_0$. Gọi P là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với $\overrightarrow{OC}$, và $\overrightarrow{OA'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{OA}$ lên mặt phẳng P. Ta quay vectơ $\overrightarrow{OA'}$ quanh O một góc $\frac{\pi}{2}$ theo chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ điểm C, ta được vectơ $\overrightarrow{OA''}$.

Ta có: $\left|\overrightarrow{OA''}\right| = \left|\overrightarrow{OA'}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right|.\cos(\frac{\pi}{2} - (\vec{a},\vec{c}_0)) = |\vec{a}|.|\vec{c}_0|\sin(\vec{a},\vec{c}_0)$.

Ngoài ra, $\overrightarrow{OA'}$ và $\vec{a} \wedge \vec{c}_0$ cùng hướng. Vậy $\overrightarrow{OA''} = \vec{a} \wedge \vec{c}_0$.

Từ điểm A dựng vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, khi đó : $\overrightarrow{O\mathbf{B}} = \vec{a} + \vec{b}$. Ta cũng gọi $\overrightarrow{O\mathbf{B}'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{O\mathbf{B}}$ trên mặt phẳng P và $\overrightarrow{O\mathbf{B}''}$ là kết quả cuả việc quay $\overrightarrow{O\mathbf{B}'}$ qua phép quay ở trên. Khi đó ta có: $\overrightarrow{O\mathbf{B}''} = (\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c}_0$, nhưng vì $\overrightarrow{A'B'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AB}$ trên mặt phẳng P và $\overrightarrow{A''B''}$ là ảnh của $\overrightarrow{A'B'}$ qua phép quay trên nên $\overrightarrow{A''B''} = \vec{b} \wedge \vec{c}_0$.





Ta có : $\overrightarrow{O\mathbf{B}''} = \overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{A''B''}$ nên:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c}_0 = (\vec{a} \wedge \vec{c}_0) + (\vec{b} \wedge \vec{c}_0).$$

Vì $\vec{c}_0 = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$ nên $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = (\vec{a} \wedge \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}) + (\vec{b} \wedge \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|})$ hay

$$(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \wedge \vec{c}) + (\vec{b} \wedge \vec{c}) .$$

Vậy đẳng thức (***) được chứng minh .

Đẳng thức (****) hiển nhiên suy ra ngay từ đẳng thức (***)

1.4.Biểu thức tọa độ của tích có hướng hai vectơ

Giả sử trong hệ trục tọa độ Oxyz cho $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Ta có :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) .$$

2.Tích hỗn tạp của ba vectơ

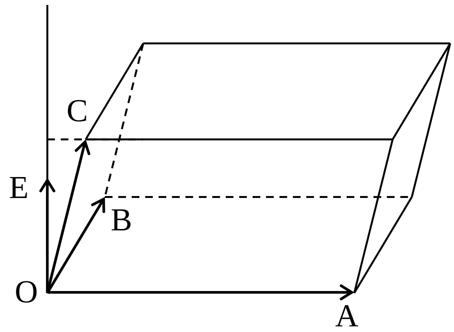
2.1. Định nghĩa

Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nếu lấy tích vectơ $\vec{a} \wedge \vec{b}$ rồi nhân vô hướng với $\vec{c}$ ta được số $(\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c}$ số này được gọi là tích hỗn tạp (hỗn hợp) của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. *Ký hiệu:*($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$).

Như vậy: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}].\vec{c}$

2.2.Ý nghĩa hình học

Từ một điểm O bất kỳ ta dựng các vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$



Gọi $\overrightarrow{OE}$ là vectơ đơn vị vuông góc với $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$, sao cho hệ ba vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}$ tạo thành một tam diện thuận. Khi đó vectơ $\vec{a} \wedge \vec{b}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{OE}$ và có modul bằng diện tích của hình bình hành dựng trên $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$,

Như vậy : $\vec{a} \wedge \vec{b} = S.\overrightarrow{OE}$

Ta dựng hình hộp có đỉnh O và ba cạnh là OA, OB, OC. Ta có thể tích V của hình hộp là V = S.h, trong đó h là chiều cao, tức là bằng độ dài hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{OC}$ lên đường thẳng OE .

Suy ra T=$(\vec{a} \wedge \vec{b}).\ \vec{c} = S.\ \overrightarrow{OE}.\overrightarrow{OC} = S.\text{proj}_{OE}\overrightarrow{OC} = \pm S.h = \pm V$.

Hay T= V nếu ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tạo thành một tam diện thuận, T=-V nếu ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tạo thành một tam diện nghịch.

Tóm lại: Giá trị tuyệt đối tích hỗn hợp của 3 vectơ bằng thể tích hình hợp dựng trên ba vectơ đó tức là : $V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$.

2.3.Một số tính chất

1°. Điều kiện cần và đủ để tích hỗn tạp ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bằng không là ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng .

Thật vậy, nếu ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng thì dễ dàng thấy rằng:$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})=0$

Ngược lại, giả sử $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ mà ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng thì theo trên $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} \neq 0$ (vô lý).

2°. Tích hỗn tạp đổi dấu nếu ta hoán vị hai trong ba vectơ của nó, nghĩa là:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}).$$

Thật vậy, nếu ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng là hiển nhiên.

Trong trường hợp ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng, giả sử ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tạo thành một tam diện thuận thì khi hoán vị hai trong ba vectơ đó ta được một tam diện nghịch và bởi vậy tích hỗn tạp sẽ đổi dấu.

3°. Nếu nhân một trong các vectơ của tích hỗn tạp với một số k thì tích hỗn tạp sẽ được nhân với số đó .

Thật vậy: $(k.\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ((k.\vec{a}) \wedge \vec{b}).\vec{c} = k(\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c} = k(.\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

4°.Tính phối đối với phép cộng, nghĩa là:

$$((\vec{a}_1 + \vec{a}_2), \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$$

$$(\vec{a}, (\vec{b}_1 + \vec{b}_2), \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{b}_2, \vec{c})$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, (\vec{c}_1 + \vec{c}_2)) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_2).$$

Tính chất này dễ dàng chứng minh dựa vào tính chất của tích vectơ và tích vô hướng của hai vectơ .

2.4. Biểu thức tọa độ của tích hỗn tạp của ba vectơ

Giả sử trong hệ trục tọa độ Oxyz cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có tọa độ là:

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Ta có $\quad (\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_1 \end{vmatrix}$

Nên điều kiện cần và đủ để $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là : $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_1 \end{vmatrix} = 0$

3.Tích vectơ kép

3.1.Định nghĩa

Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ thì tích vectơ kép của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là một vectơ được định nghĩa là $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$.

3.2.Tính chất

Tích vectơ kép của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là một vectơ đồng phẳng với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$.

4.Một số ứng dụng hình học

1°. Cho 2 vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ta dể thấy mặt phẳng nhận 2 vectơ đó làm vectơ chỉ phương sẽ có pháp vectơ $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

2°. Nếu cho đường thẳng (Δ): $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

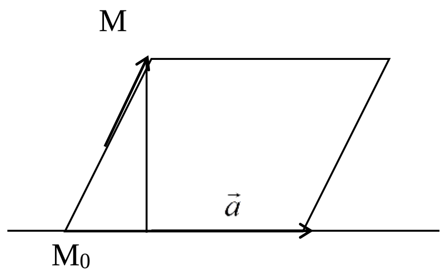
thì vectơ chỉ phương của (Δ) là $\vec{a} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ với $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

3°. Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

Trong không gian Oxyz cho điểm M(x_1, y_1, z_1) và đường thẳng:

$$(\Delta): \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Ta có điểm $M_o(x_0, y_0, z_0) \in (\Delta)$.Khi đó: $d(M, \Delta) = \dfrac{S_{\vec{a}, \overrightarrow{M_0M}}}{|\vec{a}|} = \dfrac{|\vec{a} \wedge \overrightarrow{M_0M}|}{|\vec{a}|}$



Tức d(M, Δ) = $\dfrac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}}$

4º. Nếu cho 3 vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$

thì thể tích hình hộp dựng trên ba vectơ đó là $V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_1 \end{matrix} \right\|$

Và thể tích hình chóp dựng trên ba vectơ đó là $V_{ch(\vec{a},\vec{b},\vec{c})} = \dfrac{1}{6} \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_1 \end{matrix} \right\|$

5º. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng chéo nhau:

$$\Delta_1: \quad \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3} \ ; \qquad \Delta_2: \quad \frac{x - x_2}{a_1} = \frac{y - y_2}{a_2} = \frac{z - z_2}{a_3}$$

Ta có $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \Delta_1$ và $M_2(x_2, y_2, z_2) \in \Delta_2$

Khi đó $d(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{V_{\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{M_1M_2}}}{S_{\vec{a},\vec{b}}} = \dfrac{\left|(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{M_1M_2})\right|}{\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|}$

Hay $d(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2}}$

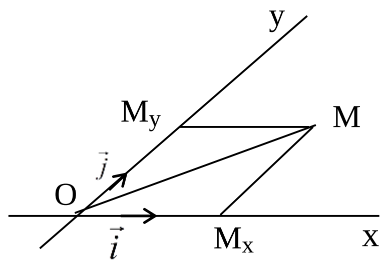
§6 HỆ TỌA ĐỘ APHIN

1.Hệ tọa độ aphin trong mặt phẳng

1.1.Định nghĩa

Trong mặt phẳng cho một điểm O và hai vectơ độc lập tuyến tính $\vec{i}$ và $\vec{j}$. Khi đó tập hợp gồm điểm O và hai vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$ được gọi là một hệ tọa độ aphin (mục tiêu aphin). Điểm O gọi là gốc tọa độ, cũng hai vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$ được gọi là vectơ cơ sở thứ nhất, thứ hai.

Ta thường *ký hiệu*:{O, $\vec{i}$, $\vec{j}$ }.



1.2.Tọa độ aphin

Trong mặt phẳng cho hệ tọa độ aphin {O, $\vec{i}$, $\vec{j}$ } và một điểm M. Nếu $\overrightarrow{OM}$ = (x,y) đối với cơ sở { $\vec{i}$, $\vec{j}$ } thì cặp số (x, y) được gọi là tọa độ aphin của điểm M đối với hệ tọa độ aphin {O, $\vec{i}$, $\vec{j}$ }.

Nếu $A(x_1,y_1)$ và $B(x_2,y_2)$ thì $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

1.3.Đổi tọa độ aphin

Trong mặt phẳng cho hai hệ tọa độ aphin {O, $\vec{i}$, $\vec{j}$ } và {O', $\vec{i}$', $\vec{j}$'} và một điểm M bất kỳ trong mặt phẳng. Giả sử M, $\vec{i}$', $\vec{j}$, O' có tọa độ lần lượt đối với hệ tọa độ { O, $\vec{i}$, $\vec{j}$ } là (x,y); (a,a'); (b,b'); (c,c') và M có tọa độ đối với hệ tọa độ {O', $\vec{i}$', $\vec{j}$'} là (x', y').

Khi đó ta có: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

$$\Leftrightarrow \quad x.\vec{i} + y.\vec{j} = c.\vec{i} + c'.\vec{j} + x'.\vec{i}' + y'.\vec{j}'$$

$$\Leftrightarrow \quad x.\vec{i} + y.\vec{j} = c.\vec{i} + c'.\vec{j} + x'.(a.\vec{i} + a'.\vec{j}) + y'.(b.\vec{i} + b'.\vec{j})$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a.x' + b.y' + c \\ y = a'.x' + b'.y' + c' \end{cases}$$

Công thức này được gọi là công thức đổi tọa độ từ hệ tọa độ aphin {O, $\vec{i}$, $\vec{j}$ } sang hệ tọa độ aphin {O', $\vec{i}$', $\vec{j}$'}.

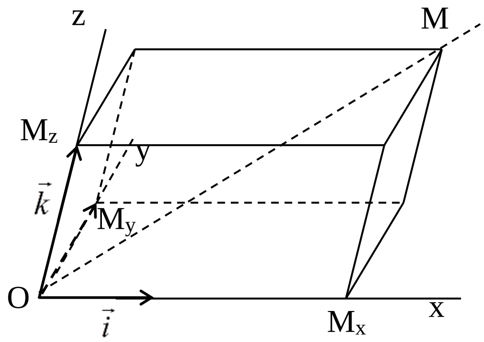
Gọi ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$, thì ma trận A được gọi là ma trận của phép biến đổi tọa độ. Do hệ vectơ { $\vec{i}$', $\vec{j}$'} là hệ độc lập tuyến tính nên $\det A \neq 0$.

2.Hệ tọa độ aphin trong không gian

2.1.Định nghĩa

Trong không gian cho một điểm O và ba vectơ độc lập tuyến tính $\vec{i}$, $\vec{j}$ và $\vec{k}$. Khi đó tập hợp gồm điểm O và ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ được gọi là một hệ tọa độ aphin (mục tiêu aphin). Điểm O gọi là gốc tọa độ, cũng ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ được gọi là vectơ cơ sở thứ nhất, thứ hai, thứ ba.

Ta thường *ký hiệu*: $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.



2.2.Tọa độ aphin

Trong không gian cho hệ tọa độ aphin $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ và một điểm M. Nếu $\overrightarrow{OM}$ =(x,y,z) đối với cơ sở $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ thì bộ số (x,y,z) được gọi là tọa độ aphin của điểm M đối với hệ tọa độ aphin $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Nếu $A(x_1,y_1,z_1)$ và $B(x_2,y_2,z_2)$ thì $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

2.3.Công thức đổi tọa độ aphin

Trong không gian cho hai hệ tọa độ aphin $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ và $\{O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$và một điểm M bất kỳ trong không gian .

Giả sử M , $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$, O' có tọa độ lần lượt đối với hệ tọa độ $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ là (x, y, z); (a, a', a''); (b, b', b''); (c, c', c''); (d, d', d'') và M có tọa độ đối với hệ tọa độ $\{O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ là (x',y',z').

Khi đó ta có: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

$$\Leftrightarrow x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} = d.\vec{i} + d'.\vec{j} + d''.\vec{k} + x'.\vec{i}' + y'.\vec{j}' + z'.\vec{k}'$$

$$\Leftrightarrow x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} = d.\vec{i} + d'.\vec{j} + d''.\vec{k} + x'(a.\vec{i} + a'.\vec{j} + a''.\vec{k}) + $$

$$+ y'(b.\vec{i} + b'.\vec{j} + b''.\vec{k}) + z'(c.\vec{i} + c'.\vec{j} + c''.\vec{k})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a.x' + b.y' + c.z' + d \\ y = a'.x' + b'.y' + c'.z' + d' \\ z = a''.x' + b''.y' + c''.z' + d'' \end{cases}$$

Công thức này được gọi là công thức đổi tọa độ từ hệ tọa độ aphin $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sang hệ tọa độ aphin $\{O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$.

Gọi ma trận A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$, thì ma trận A được gọi là ma trận của phép biến đổi tọa độ, và detA $\neq 0$.

§7 CÁC LOẠI HỆ TỌA ĐỘ KHÁC

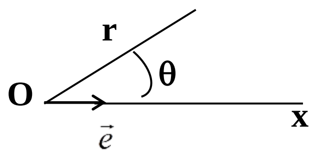
1.Hệ tọa độ cực trong mặt phẳng

1.1.Định nghĩa

Hệ tọa độ cực trong mặt phẳng gồm một tia Ox xuất phát từ điểm O và có vectơ chỉ hướng đơn vị $\vec{e}$. Điểm O gọi là gốc cực, Ox gọi là trục cực và hệ tọa độ cực trong mặt phẳng *ký hiệu* (O, $\vec{e}$).

1.2.Tọa độ cực của một điểm

Trong mặt phẳng cho hệ tọa độ cực (O, $\vec{e}$) và một điểm M bất kỳ. Ta đặt r=OM và θ là góc định hướng giữa cặp vectơ $\vec{e}$ và $\overrightarrow{OM}$. Khi đó cặp số (r,θ) được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ (O, $\vec{e}$).



Ký hiệu M(r,θ)

r được gọi là bán kính cực của điểm M,

θ được gọi là góc cực của điểm M.

Chú ý:

Đối với mỗi điểm M khác với điểm O tọa độ (r,θ) không duy nhất. Nếu (r,θ) là tọa độ của điểm M thì (r,θ + 2kπ) cũng là tọa độ của điểm M. Ngược lại cho một cặp số (r,θ) trong đó r > 0 ta có một điểm M duy nhất mà một trong các tọa độ của điểm M là (r,θ).

Trong trường hợp M trùng gốc cực O thì O có tọa độ là (0,θ) với θ bất kỳ .

1.3.Hệ toạ độ cực mở rộng

Hệ toạ độ cực trong đó $r = \overline{OM}$ và θ là góc định hướng giữa cặp vectơ $\vec{e}$ và $\overrightarrow{OM}$ được gọi là hệ tọa độ cực mở rộng.

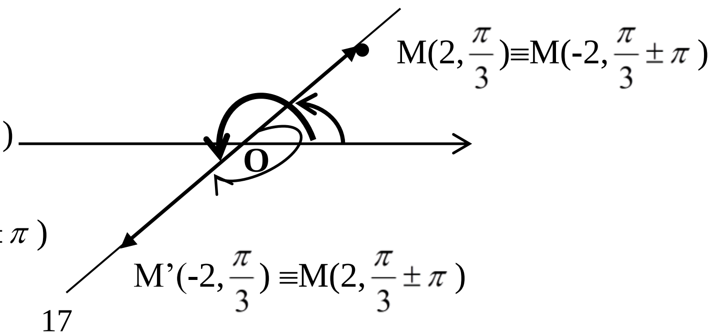
Nếu (r,θ) là tọa độ của điểm M thì ta cũng có M(r,θ) ≡ M(r,θ + 2kπ) ≡ M(-r, θ±π) nên tọa độ của một điểm M không duy nhất. Ngược lại cho một cặp số (r,θ) ta có một điểm M duy nhất mà một trong các tọa độ của điểm M là (r,θ).

Trong trường hợp M trùng gốc cực O thì O có tọa độ là (0,θ) với θ bất kỳ .

Ví dụ:

M(2, $\frac{\pi}{3}$) ≡ M(2, $\frac{\pi}{3}$+k2π) ≡ M(-2, $\frac{\pi}{3} \pm \pi$)

M'(-2, $\frac{\pi}{3}$) ≡ M'(-2, $\frac{\pi}{3}$+k2π) ≡M(2, $\frac{\pi}{3} \pm \pi$)



2. Mối quan hệ tọa độ cực và tọa độ Descartes vuông góc

Giả sử cho hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy và chọn hệ tọa độ cực $(O,\vec{e})$ sao cho tia Ox trùng trục hoành và vectơ đơn vị chỉ hướng $\vec{e}_1 = \vec{e}$. Khi đó nếu cho một điểm M (x,y) trong hệ trục tọa độ Oxy và cũng điểm M này trong hệ trục tọa độ cực (O, $\vec{e}$) có tọa độ M(r, θ).

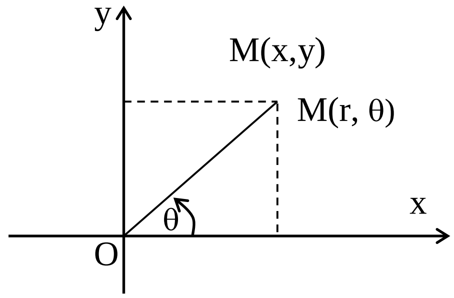
Khi đó $\overrightarrow{OM}$ = (x,y) , $\vec{e}_1$ = (1,0) và θ là góc định hướng giữa $\vec{e}_1$ và $\overrightarrow{OM}$

Nên $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ và $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Và $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ta suy ra:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad (1)$$



Đó là công thức liên hệ giữa tọa độ cực và tọa độ Descartes vuông góc.

3.Tọa độ trụ trong không gian

3.1.Định nghĩa

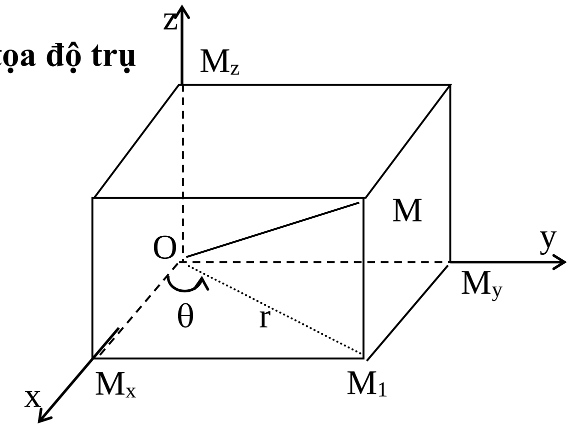
Trong không gian Oxyz cho một điểm M. Gọi M_1 là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng Oxy. Ta đặt r = OM_1 và θ là góc định hướng giữa cặp vectơ $\vec{e}_1$ và $\overrightarrow{OM_1}$ và $\overline{MM_1}$ = z. Khi đó cặp số (r,θ,z) được gọi là tọa độ trụ của điểm M.

Ký hiệu: M(r,θ,z).

3.2.Sự liên hệ giữa tọa độ Descartes vuông góc và tọa độ trụ

Giả sử điểm M có tọa độ Descartes là (x,y,z) và có tọa độ trụ là (r,θ,z).

Dễ dàng thấy rằng: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$, $0 \le \theta \le 2\pi$



Đó là cùng thức liên hệ giữa tọa độ Descartes vuông góc và tọa độ trụ .

4.Tọa độ cầu

4.1.Định nghĩa

Trong không gian Oxyz cho một điểm M. Ta đặt r = OM, gọi M_1 là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng Ox, θ là góc định hướng giữa cặp vectơ $\vec{e}_1$ và $\overrightarrow{OM_1}$ và φ là góc tạo bởi hai vectơ $\vec{e}_3$ và $\overrightarrow{OM}$. Khi đó cặp số (r,θ,φ) được gọi là tọa độ cầu của điểm M. *Ký hiệu*: M(r,θ,φ)

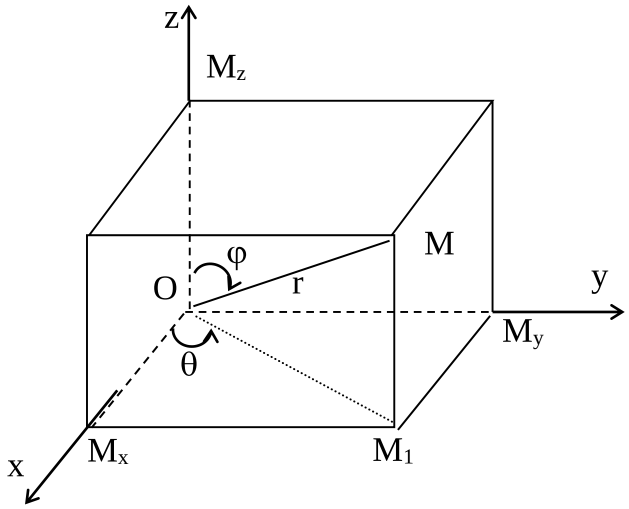
4.2.Sự liên hệ giữa tọa độ Descartes vuông góc và tọa độ cầu

Giả sử điểm M có tọa độ Descartes là (x,y,z) và có tọa độ cầu là (r,θ,φ).

Dễ dàng thấy rằng:

$$\begin{cases} x = r.\sin\varphi.\cos\theta \\ y = r.\sin\varphi.\sin\theta \\ z = r.\cos\varphi \end{cases}$$

$0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi$



Đó là công thức liên hệ giữa tọa độ Descartes vuông góc và tọa độ cầu .

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1.Trong không gian cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'.

a.Chứng minh rằng ba véctơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}$ làm cơ sở của không gian.

b.Hãy tìm tọa độ của các véctơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AA'}$.

2.Cho tam giác ABC và ba trung tuyến AD, BE, CF. Hãy tính: T= $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}$.

3.Chứng minh rằng nếu A, B, C, D là bốn điểm bất kỳ trong không gian thì: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB} = 0$

Từ đó suy ra:

a.Ba đường cao trong tam giác đồng qui.

b.Nếu một tứ diện có hai cặp cạnh đối vuông góc thì cặp thứ ba cũng vuông góc.

4. Cho A(1,1,1) và B(4,5,-3). Tìm chiếu của véctơ $\overrightarrow{AB}$ lên trục u, biết rằng trục u tạo với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz các góc bằng nhau.

5. Hai véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ tạo thành góc $\varphi = 60^0$, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$, trục u cùng hướng với $\vec{a}$, trục v ngược hướng với $\vec{b}$. Tính $ch_v\vec{a}$, $ch_u\vec{b}$.

6. Cho 2 trục u,v vuông góc. Biết rằng $\vec{a}$, u, v đồng phẳng, $|\vec{a}|$=5, $ch_u\vec{a} = 3$

Tính chiếu $ch_v\vec{a}$ nếu $\vec{a}$ hợp với trục v:

a. Góc $\alpha < 90^0$

b. Góc $90^0 < \alpha < 180^0$

7. Cho 2 véctơ $\vec{a} = (4,-2,-3)$, $\vec{b} = (0, 1, 3)$. Tìm $\vec{X}$ biết rằng

$\vec{X} \perp \vec{a}$; $\vec{X} \perp \vec{b}$; $|\vec{X}| = 26$ đồng thời $\vec{X}$ tạo với trục Oy một góc tù.

8. Cho $\vec{a} = (8, 4, 1)$, $\vec{b} = (2, -2, 1)$. Hãy tìm $\vec{c}$ sao cho đồng thời thỏa mãn: 3 véctơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng, $\vec{a} \perp \vec{c}, |\vec{a}| = |\vec{c}|$ và góc giữa $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là góc nhọn.

9. Gọi α, β, γ là các góc tạo bởi véctơ $\vec{a}$ với các véctơ đơn vị $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ của hệ trục tọa độ Derscartes vuông góc Oxyz. Chứng minh: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Khi đó $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ còn gọi là cosin chỉ phương của véctơ $\vec{a}$.

10. Chứng minh rằng: nếu $\vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{b} \wedge \vec{c} + \vec{c} \wedge \vec{a} = \vec{0}$ thì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là đồng phẳng.

Kiểm tra điều ngược lại có đúng không.

11. Cho ba véctơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, biết rằng $\vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{c}$, $\vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{a}$, $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$. Tìm modul của các véctơ đó và góc giữa chúng.

12. Tam giác ABC dựng trên véctơ $\overrightarrow{AB} = \vec{m} + 2\vec{n}, \overrightarrow{AC} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$. Biết $|\vec{m}| = 5, |\vec{n}| = 3$ và góc giữa $\vec{m}$ và $\vec{n}$ là 60^0. Hãy tính tính diện tích tam giác ABC và đường cao BH.

13. Tính giá trị $K = (\vec{a} \wedge \vec{b})^2 + (\vec{a}.\vec{b})^2$

14. Tìm $\vec{X}$, biết rằng: $\vec{X}.\vec{a} = k$, $\vec{X} \wedge \vec{b} = \vec{c}$ trong đó $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cho trước và $\vec{a}$ không vuông góc với $\vec{b}$, $k \in R$.

15. Giả sử tồn tại véctơ $\vec{X}$ thỏa mãn đồng thời $\vec{a}_1 \wedge \vec{X} = \vec{b}_1$ và $\vec{a}_2 \wedge \vec{X} = \vec{b}_2$

Hãy chứng minh: $\vec{a}_1.\vec{b}_2 + \vec{a}_2.\vec{b}_1 = 0$

16. Chứng minh rằng:

a. $\vec{a} \perp \vec{b}$ và $\vec{a} \perp \vec{c}$ thì $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{0}$

b. Với bất kỳ ba véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ta đều có:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} + (\vec{b} \wedge \vec{c}) \wedge \vec{a} + (\vec{c} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{0}$$

c. Giả sử ba véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. Hãy xét tính đồng phẳng của các véctơ: $\vec{a} \wedge \vec{b}$, $\vec{b} \wedge$, $\vec{c} \wedge \vec{a}$.

17. Hãy tính thể tích hình hộp dựng trên các véctơ sau:

a. $\vec{a} = (1, -3, 1)$; $\vec{b} = (1, 1, -3)$; $\vec{c} = (2, 2, 1)$.

b. $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$, $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$, $\vec{c} = 2\vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$

với các trường hợp:

+ $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ là các véctơ đơn vị vuông góc với nhau từng đôi một.

+ $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ là các véctơ bất kỳ.

18. Cho các véctơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$. Biết rằng bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một mặt phẳng. Chứng minh rằng:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) + (\vec{c}, \vec{a}, \vec{d})$$

19. Cho tứ diện OABC, gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng OBC.

Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{OH} = \vec{a} - \frac{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}{(\vec{b} \wedge \vec{c})^2}.(\vec{b} \wedge \vec{c})$$

20. Tính khoảng cách từ:

a. Điểm M(-1, 1, 2) đến mặt phẳng đi qua ba điểm A(1,-1, 1), B(-2, 1, 3) C(4,-4,-2).

b.. Điểm B(1, 2, 3) đến đường thẳng (d_2): $\begin{cases} x+2y+z = 1 \\ 3x-y+4z=0 \end{cases}$

21. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a. (Δ_1): $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{3}$ *và* (Δ_2): $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x-y+3z-5 = 0 \end{cases}$

b. (Δ_1'): $\begin{cases} x + y = 0 \\ x-y+z+4 = 0 \end{cases}$ *và* (Δ_2'): $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$

22.Trong không gian cho hình chóp ABCD, gọi G là trọng tâm của hình chóp.

a.Chứng ming rằng: {A, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$} và {B, $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BG}$} là hai mục tiêu aphin của không gian.

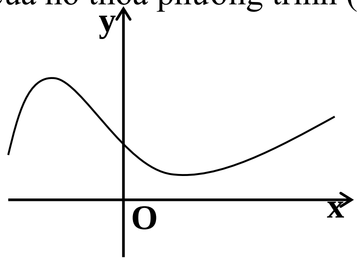
b.Tìm công thức đổi từ mục tiêu {A, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$} sang mục tiêu {B, $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BG}$}.

Chương II ĐƯỜNG CONG PHẲNG

§1. PHƯƠNG TRÌNH CỦA ĐƯỜNG TRONG MẶT PHẲNG

1.Phương trình của đường cong phẳng

Gia sử trong mặt phẳng Oxy cho một đường cong Γ nào đó. Phương trình F(x,y) = 0 (1) gọi là phương trình tổng quát của đường cong Γ nếu một điểm M thuộc đường cong Γ khi và chỉ khi tọa độ (x,y) của nó thỏa phương trình (1).



2.Phương trình tham số của đường

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho một đường cong Γ nào đó. Hệ phương trình: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ (2) gọi là phương trình tham số của đường cong Γ nếu mọi điểm M thuộc đường cong Γ khi và chỉ khi tìm được một giá trị t sao cho tọa độ (x,y) của điểm M thỏa mãn phương trình (2).

Phương trình (2) được gọi là phương trình tham số của đường, đại lượng t gọi là tham số.

3.Một số ví dụ

Ví dụ 1: Viết phương trình đường cong γ, với γ là tập hợp tất cả các điểm trong mặt phẳng sao cho tích các khoảng cách từ điểm đó đến hai điểm P, Q cho trước luôn bằng một hằng số a^2.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho trục Ox cùng phương từ P đến Q, gốc tọa độ O là trung điểm của PQ, khi đó trục Oy vuông góc PQ.

Giả sử M(x,y) là điểm tùy ý thuộc γ , ta có:

$$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{(x-b)^2+y^2} \quad ; \qquad |\overrightarrow{MQ}| = \sqrt{(x+b)^2+y^2}$$

$$MP.MQ = a^2$$

$$\Leftrightarrow \left[(x-h^2)+y^2\right]\left[(x+b)^2+y^2\right] = a^4$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+b^2)-4x^2b^2 = a^4$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)-2b^2\ (x^2-y^2) = a^4-b^4$$

Ví dụ 2: Hãy viết phương trình tham số của đường tròn có tâm I , bán kính R.

Chọn hệ tọa độ Derscartes vuông góc Oxy sao cho I(a,b).

Giả sử M(x,y) thuộc đường tròn, gọi t là góc định hướng của vectơ đơn vị $\vec{e}_1$ của trục Ox và vectơ $\overrightarrow{IM}$.

Khi đó ta có: $\overrightarrow{IM}$ = (x-a , y-b) và $\vec{e}_1$= (0, 1) và IM = R nên:

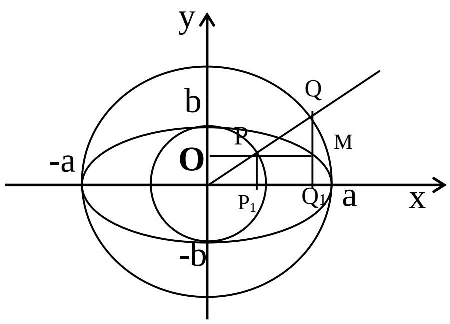
$$\begin{cases} \cos t = \dfrac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = \dfrac{x-a}{R} \\ \sin t = \dfrac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = \dfrac{y-b}{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{cases} \quad (*)$$

Do đó (*) là phương trình tham số của đường tròn tâm I(a,b) , bán kính R .

Ví dụ 3: Viết phương trình tham số của elip.

Giả sử cho elip có phương trình chính tắc là: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (a> b).

Ta hãy dựng hai đường tròn đồng tâm O, có bán kính a,b .Giả sử một tia nào đó xuất phát từ O tạo với Ox một góc φ và cắt đường tròn nhỏ tại P , đường tròn lớn tại Q . Gọi M là giao điểm của đường thẳng qua P song song với Ox với đường thẳng qua Q song song với Oy. Ta sẽ chứng minh M nằm trên elip đã cho.



Thật vậy, gọi P_1và Q_1 là hình chiếu của P,Q lên Ox và gọi (x,y) là tọa độ của điểm M.

Khi đó ta có:

x = OQ_1 = OQ.cosφ = a.cosφ

y = Q_1M = P_1P = OP.sinφ = b.sinφ

Vậy nên: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ tức là điểm M thuộc elip.

Vậy hệ $\begin{cases} x = a.\cos\varphi \\ y = b.\sin\varphi \end{cases}$ là phương trình tham số của elip , 0≤ φ≤ 2π.

4.Đường đại số

Biểu thức có dạng : F(x,y) = $A_1x^{k_1}y^{l_1} + A_2x^{k_2}y^{l_2} + ... + A_sx^{k_s}y^{l_s}$

Trong đó A_i khác 0, k_i , l_i là những số nguyên không âm được gọi là biểu thức đại số đối với các biến x, y, với i = 1,...,s.

Số lớn nhất trong các số k_i + l_i được gọi là bậc của biểu thức đại số F(x,y). Nếu số lớn nhất đó là n thì ta nói rằng F(x,y) là biểu thức đại số bậc n.

Đường cong Γ được gọi là đường đại số bậc n nếu như phương trình tổng quát của đường cong Γ có dạng: F(x,y) = 0, trong đó F(x,y) là biểu thức đại số bậc n.

§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG CONG TRONG HỆ TỌA CỰC

1.Phương trình đường cong

Cũng như đối với hệ tọa độ Derscartes vuông góc, một đường cong γ cũng có phương trình đối với hệ tọa độ cực. Nếu đã chọn hệ tọa độ cực (O,$\vec{e}$) thì phương trình: F(r,θ) = 0 sẽ gọi là phương trình của đường cong γ nếu điểm M thuộc đường cong γ khi và chỉ khi tọa độ cực của điểm M là (r, θ) thỏa mãn phương trình F(r, θ) = 0.

2.Tính đối xứng của đồ thị đường cong

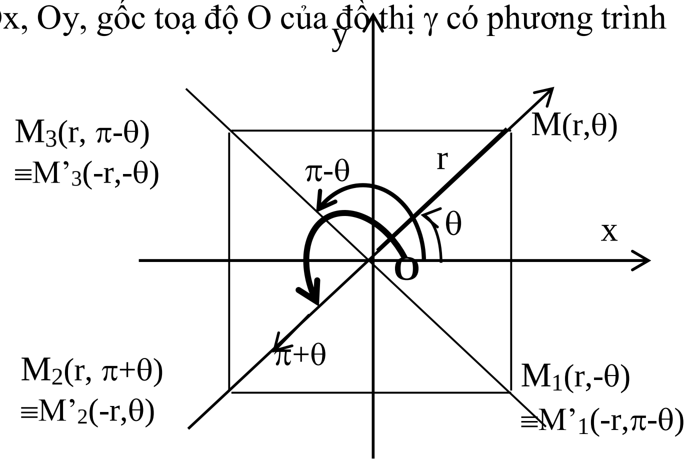
Dựa vào mối liên hệ giữa hệ tọa độ Descartes trong mặt phẳng và hệ toạ độ cực ta kiểm tra tính đối xứng qua các trục Ox, Oy, gốc toạ độ O của đồ thị γ có phương trình $F(r, \theta) = 0$.

Giả sử $M(r,\theta) \in \gamma$, nếu:

+ M_1 hoặc M_1' thuộc γ thì đồ thị γ đối xứng qua trục Ox.

+ M_3 hoặc M_3' thuộc γ thì đồ thị γ đối xứng qua trục Oy.

+ M_2 hoặc M_2' thuộc γ thì đồ thị γ đối xứng qua gốc tọa độ O.



Chú ý:

+ Nếu đồ thị có hai tính đối xứng thì sẽ có tính đối xứng thứ ba.

+ Do $M(r,\theta) \equiv M(r, \theta \pm k2\pi)$ nên tọa độ của một điểm sẽ có chu kỳ 2π đối với với hệ trục.

Ví dụ: Xét tính đối xứng của đồ thị đường cong γ: $r = \sin 2\theta$

Giả sử điểm $M(r,\theta) \in \gamma$: $r = \sin 2\theta$

Ta có $\sin 2(-\theta) = -\sin 2\theta = -r$

Suy ra $M'(-r,-\theta) \in \gamma$ nên đồ thị γ đối xứng qua trục Oy

Và $\sin 2(\pi + \theta) = \sin(2\theta + 2\pi) = \sin 2\theta = r$

Suy ra $M''(r, \pi+\theta) \in \gamma$ nên đồ thị γ đối xứng qua gốc toạ độ O

Vậy đồ thị đường cong đối xứng qua các trục toạ độ và gốc toạ độ.

3.Một số ví dụ

Ví dụ 1: Phương trình đường tròn tâm O, bán kính R hiển nhiên có phương trình là: $r = R$.

Ví dụ 2: Phương trình đường thẳng đi qua O có phương trình là : $\theta = \alpha$, với α là một số cố định.

Ví du3: Đường xoắn ốc hypebolic được định nghĩa là tập hợp tất cả các điểm M mà tọa độ cực (r, θ) của nó thoả phương trình :$r = \frac{a}{\theta}$, trong đó a là một hằng số dương, $\theta > 0$.

Ta chú ý rằng nếu cho θ lấy các giá trị lần lượt càng ngày càng lớn thì gía trị r tương ứng ngày càng bé. Khi θ tiến ra vô cùng thì r tiến tới 0. Khi đó các vị trí tương ứng của M sẽ chạy vòng quanh điểm O và càng ngày càng sát tới O nhưng không bao giờ trùng với điểm O.

Nếu cho θ tiến tới 0, thì bán kính cực r của M sẽ tăng lên vô cùng.

Tuy nhiên nếu lấy hệ tọa độ Descartes vuông góc O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ và gọi (x,y) là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ này

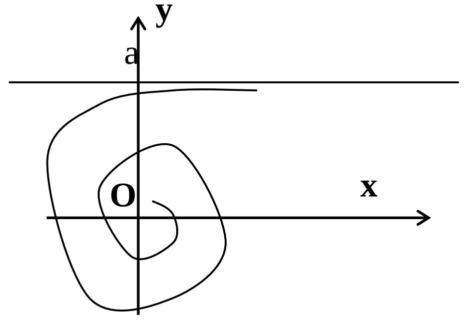
thì như ta đã biết : $y = r\sin\theta = \dfrac{a}{\theta}\sin\theta$.

Khi $\theta \to 0$ thì rõ ràng

$y \to a$ vì $\dfrac{\sin\theta}{\theta} \to 1$ khi $\theta \to 0$.

Như vậy đường xoắn ốc Hypebolic

nhận đường thẳng y = a làm đường tiệm cận.

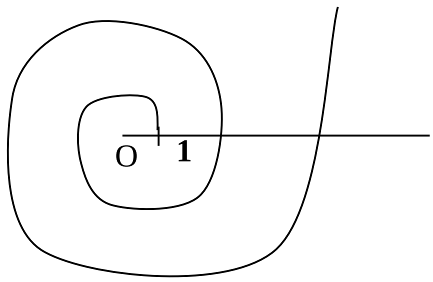


Ví dụ 4: Đường xoắn gốc logarit được định nghĩa là tập hợp tất cả những điểm M mà tọa độ cực (r, θ) của nó thỏa mãn phương trình: $r = a^{\theta}$, với $a > 1$.

Ta có:

Khi θ = 0 ta có điểm M(1,0).

Khi θ tăng lên $+\infty$ thì r cũng tăng lên vô cùng khá nhanh. Khi đó điểm M sẽ chạy quanh điểm O và càng ngày càng xa điểm O.



Khi θ giảm về $-\infty$ thì r càng ngày càng tiến tới 0. Các điểm M tương ứng sẽ chạy quanh điểm O và càng ngày càng gần tới điểm O.

Ví dụ 5: Vẽ sơ lược đồ thị đường cong (γ): r = 2cosθ

Ta nhận thấy đường cong trên có các tính chất sau

+Chu kỳ đường cong T = 2π

+Tính đối xứng

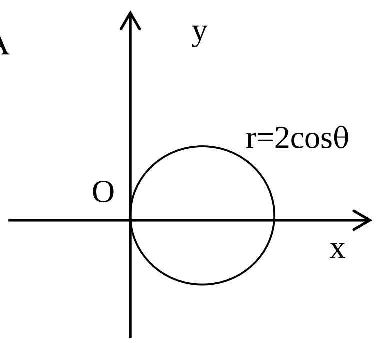
Giả sử $M(r,\theta) \in (\gamma)$, ta cũng có $M_1(r,-\theta) \in (\gamma)$ vì $2\cos(-\theta) = 2\cos\theta = r$

Nên γ đối xứng qua trục Ox.

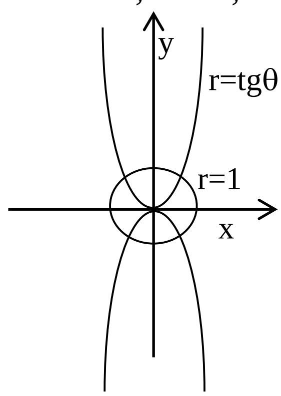
+Ta chỉ cần khảo sát đường cong trong khoảng [0,π]

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cosθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
r = 2cosθ	2	1,7	1,4	1	0	-1	-1,4	-1,7	-2

+Đồ thị là hình A



Hình A



Hình B

4.Giao điểm của hai đường cong trong tọa độ cực

Do tọa độ của một điểm trên cực ứng với nhiều cặp tọa độ khác nhau, nên cặp tọa độ này có thể thõa mãn phương trình đường cong nhưng cặp tọa độ khác thì không thỏa. Vì vậy việc tìm giao điểm của hai đường cong r = f(θ) và r = g(θ) trong mặt phẳng cực chỉ bằng giải hệ phương tình $\begin{cases} r = f(\theta) \\ r = g(\theta) \end{cases}$ là hoàn toàn không đầy đủ.

Ví dụ 1: Tìm giao điểm của đường tròn r=1 và đường cong r =tgθ

Từ hệ : $\begin{cases} r = 1 \\ r = tg\theta \end{cases} \Rightarrow tg\theta = 1 \Rightarrow \theta = \pi/4 + k\pi$

Suy ra hai đường cong chỉ giao nhau tại hai điểm $M_1(1, \pi/4), M_2(1, 5\pi/4)$, trong khi theo Hình B thì hai đường cong cắt nhau tại bốn điểm.

Để tìm đầy đủ các giao điểm của hai đường cong trong hệ tọa độ cực, ta phải xét các bước sau:

+Xác định xem gốc O có phải là giao điểm không, bằng cách thế tọa độ O trực tiếp vào từng phương trình.

+Tìm các giao điểm còn lại bằng cách giải hết tuyển hệ phương trình:

$$\left[\begin{array}{l} f(\theta + 2n\pi) = g(\theta + 2m\pi) \\ f(\theta + 2k\pi) = -g(\theta \pm 2l\pi) \end{array}\right. \quad m, n, k, l \in Z .$$

Nếu các hàm *f*, *g* cho dưới dạng biểu thức cơ bản sinθ, cosθ, tgθ, cotgθ thì ta chỉ cần giải hệ gồm hai phương trình: $\left[\begin{array}{l} f(\theta) = g(\theta) \\ f(\theta) = -g(\theta \pm \pi) \end{array}\right.$.

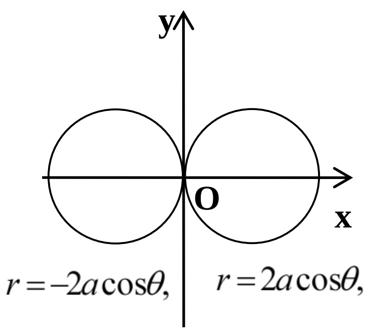
Trở lại *ví dụ 1* ta đã tìm chưa đủ giao điểm vì ta chưa xét phương trình

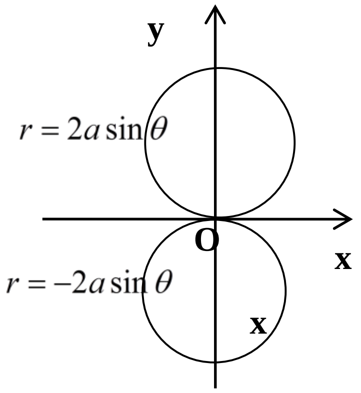
$$r = 1 = -tg(\theta + \pi) = -tg\theta \Leftrightarrow tg\theta = -1 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Suy ra có hai giao điểm nữa là $M_3(1, -\pi/4), M_4(1, 3\pi/4)$. Hiển nhiên O không là giao điểm của hai đường cong.

Vậy đường tròn r=1 giao với đường cong r =tgθ lại bốn điểm: $M_1(1, \pi/4), M_2(1, 5\pi/4)$, $M_3(1, -\pi/4), M_4(1, 3\pi/4)$.

Chú ý: Phương trình đường tròn trong hệ toạ độ cực (*a*>*0*) thường gặp





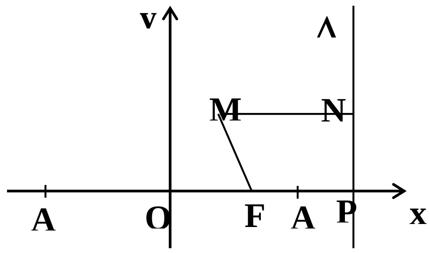
§ 3. PHƯƠNG TRÌNH TẠI ĐỈNH VÀ PHƯƠNG TRÌNH TRONG HỆ TỌA ĐỘ CỰC CỦA EIP, HYPEBOL, PARABOL

1.Định nghĩa chung của Elip, Hypebol, Parabol

Ta có thể định nghĩa elip, hypebol, parabol một cách thống nhất:

Trong mặt phẳng cho một điểm F và một đường thẳng Δ không đi qua F và một số dương e.

Khi đó tập hợp tất cả những điểm M sao cho tỷ số khoảng cách từ đó đến điểm F và tới Δ bằng e:



là một elip nếu e < 1,

là một hypebol nếu e > 1,

và là một pa rabol nếu e = 1.

Nếu e = 1 thì đó là định nghĩa của parabol.

Ở đây ta chỉ xét trường hợp $e \neq 1$.Thật vậy,

gọi P là chân đường vuông góc hạ từ F xuống Δ,

và A, A' là hai điểm chia đoan FP theo tỷ số e và -e nghĩa là

$$\frac{\overrightarrow{FA}}{\overrightarrow{AP}} = e \ , \quad \frac{\overrightarrow{FA'}}{\overrightarrow{A'P}} = -e \quad .$$

Chọn hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy sao cho Oy là trung trực của đoạn thẳng AA', trục Ox trùng với đường thẳng AA' (theo chiều từ A' đến A).

Giả sử F(c,0),A(a,0),P(p,0), dĩ nhiên A'(-a,0). Vì A và A' chia đoạn FP theo tỷ số e và -e nên:

$$a = \frac{c + ep}{1 + e} \qquad \text{và} \qquad -a = \frac{c - ep}{1 - e}$$

Suy ra : $\frac{c + ep}{1 + e} = -\frac{c - ep}{1 - e}$

Sau khi rút gọn ,ta được : $c = e^2p$ và do đó : $a = \frac{c + ep}{1 + e} = \frac{e^2 p + ep}{1 + e}$ = ep .

Giả sử M(x,y) là một điểm của tập hợp đang xét tức là : $\frac{|\overrightarrow{MF}|}{|\overrightarrow{MN}|}$ = e , trong đó MN là khoảng cách từ M tới Δ.

Ta có : $|\overrightarrow{MF}| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + c^2 - 2xc + y^2}$

$|\overrightarrow{MN}| = |p - x|$

Vậy : $\sqrt{x^2 + c^2 - 2xc + y^2} = e\,|p - x|$

Bình phương hai vế của phương trình này , với chú ý rằng c = e^2p ta đi đến phương trình tương đương :

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = e^2p^2(1-e^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2)$$

Ví e ≠1 nên chia hai vế cho $a^2(1 - e^2)$ ta được:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

Nếu e < 1 thì $a^2(1 - e^2) > 0$ nên ta đặt $a^2(1 - e^2) = b^2$ thì ta được phương trình của elip có tâm sai e.

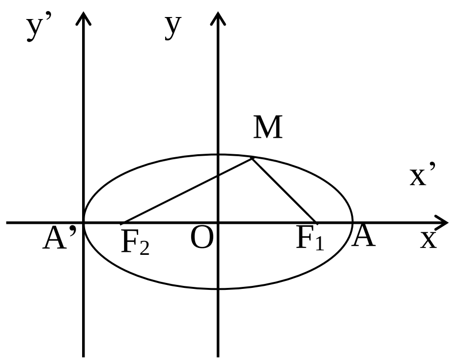
Nếu e > 1 thì $a^2(1 - e^2) < 0$ nên ta đặt $a^2(1 - e^2) = -b^2$ thì ta được phương trình của hypebol có tâm sai là e.

2.Phương trình tại đỉnh của Elip, Hypebol, Parabol:

Theo trên ta đã có: Elip, hypebol và parabol là quỹ tích những điểm mà tỷ số khoảng cách từ đó đến tiêu điểm và tới đường chuẩn bằng e không đổi. Tuy nhiên phương trình chính tắc của chúng không thể hiện sự thống nhất đó. Sau đây chúng ta sẽ chọn hệ tọa độ một cách thích hợp để phương trình của chúng sẽ có dạng giống nhau.

Giả sử elip có phương trình chính tắc là :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

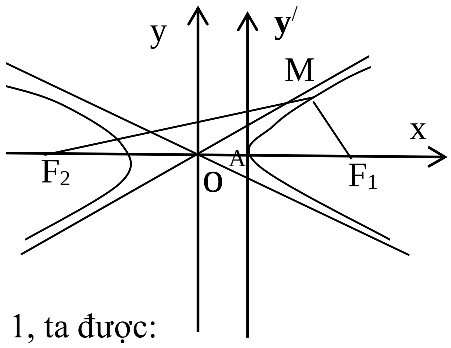


Ta hãy tịnh tiến hệ tọa độ sao cho gốc tọa độ O trùng với A'(- a , 0) nghĩa là dùng phép biến đổi tọa độ :

$$\begin{cases} x = x' - a \\ y = y' \end{cases}$$

Trong hệ tọa độ mới phương trình (1) trở thành:

$$\frac{(x' - a)^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$



Sau khi rút gọn ta được :

$$y'^2 = 2\frac{b^2}{a}x' - \frac{b^2}{a^2}x'^2$$

Ta đặt p = $\frac{b^2}{a}$, q = $-\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = e^2 - 1$, ta được:

$$y'^2 = 2px' + qx'^2 \qquad (2)$$

Phương trình (2) gọi là phương trình tại đỉnh của elip.

Đối với hypebol có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

Ta hãy tịnh tiến gốc tọa độ O về điểm $A_2(a , 0)$

Tức là dùng phép biến đổi tọa độ:

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' \end{cases}$$

Tính toán giống như trên ta được phương trình:

$$y'^2 = 2\frac{b^2}{a}x' + \frac{b^2}{a^2}x'^2$$

Ta đặt $p = \dfrac{b^2}{a}$, $q = \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{c^2 - a^2}{a^2} = e^2 - 1$, ta được:

$$y'^2 = 2px' + qx'^2 \qquad (2)$$

Như vậy, phương trình (2) cũng là phương trình tại đỉnh của hypebol.

***Tóm lại*:** Phương trình : $y'^2 = 2px' + qx'^2$ (2) xác định:

+ Một elip nếu $q < 0$

+ Một hypebol nếu $q > 0$

+ Một parabol nếu $q = 0$.

Chú ý: Ý nghĩa của tham số p trong phương trình (2)

Nếu ta vẽ qua tiêu điểm F nào đó của đường được biểu diễn bởi phương trình (2) một đường thẳng song song với trục tung và cắt đường đó tại hai điểm Pvà P’, thì ta sẽ chứng minh rằng FP = FP’ = p. Như vậy p bằng khoảng cách từ tiêu điểm tới đường có phương trình (2) theo phương trục tung , dođó p được gọi là tham số tiêu .

Đối với parabol $y'^2 = 2px'$ điều đó là hiển nhiên, vì tiêu điểm F có tọa độ $(\frac{p}{2},0)$ nên cho $x = \frac{p}{2}$, ta được $y'^2 = p^2$ nên $y' = \pm p$.

Xét elip cho bởi phương trình: $y'^2 = 2px' + qx'^2$ (2) với $q < 0$. Khi đó tiêu điểm F_1 có tọa độ là (a-c,0). Do đó thay x = a-c vào phương trình (2) thì tung độ của Pvà P’ sẽ là:

$$y'^2 = 2p(a- c) + q(a - c)^2, \text{ nhưng } q = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{p}{a} \text{ nên}$$

$$y'^2 = 2p(a- c) - \frac{p}{a}(a - c)^2 = p(a- c) \left(2 - \frac{a-c}{a}\right)$$

$$= p(a- c) \left(\frac{a+c}{a}\right) = p.\frac{a^2 - c^2}{a} = p.\frac{b^2}{a} = p^2.$$

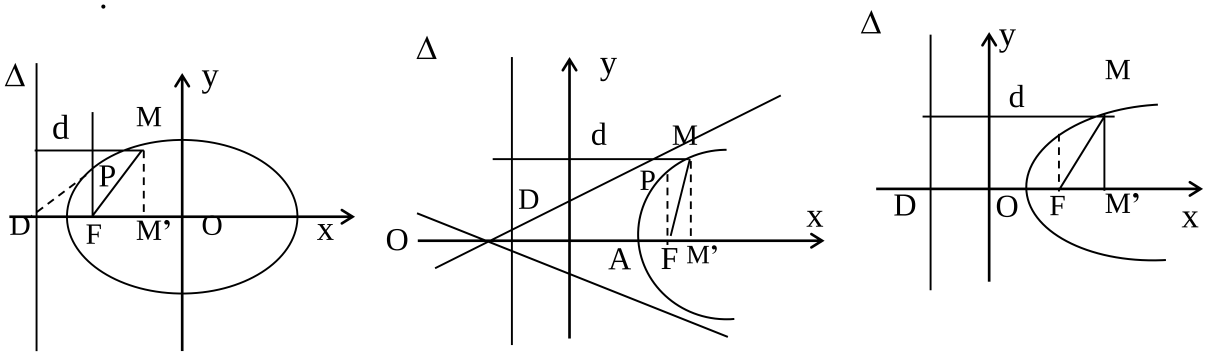
Vậy : $y' = \pm p$.

Đối với hypebol ta chứng minh hoàn toàn tương tự.

3. Phương trình của elip, hypebol và parabol trong hệ tọa độ cực

Chọn hệ tọa độ cực **sao cho cực là tiêu điểm F** (đối với elip ta chọn tiêu điểm bên trái, đối với hypebol ta chọn tiêu điểm bên phải, đối với elip ta chọn tiêu điểm bên trái, đối với parabol ta chọn tiêu điểm) và trục cực vuông góc với đường chuẩn tương ứng và hướng về phía không có đường chuẩn đó.

.



Gọi D là giao điểm của trục cực Fx và đường chuẩn Δ., P là điểm nằm trên đường cong mà hình chiếu của nó trên Fx là F. Khi đó PF = p. Vì tỷ số khoảng cách từ P đến F và tới bằng e nên $\dfrac{PF}{DF} = e$ nên $DF = \dfrac{p}{e}$.

Gọi M(r,θ) là một điểm nằm trên đường cong (nếu là đường hypebol thì ta lấy điểm M nằm nhánh bên phải). Ta hãy tính khoảng cách từ M đến Δ..

Rõ rằng là:

$$d = DF + MF.\cos\theta = \frac{p}{e} + r.\cos\theta .$$

Nhưng theo định nghĩa của elip, hypebol và parabol: $\dfrac{r}{d} = e$ hay $r = de$, tức là:

$$r = p + r.e.\cos\theta \quad \text{hay} \quad r(1 - e.\cos\theta) = p.$$

Do đó ta có phương trình:

$$r = \frac{p}{1 - e.\cos\theta} \qquad (3)$$

Đó chính là phương trình của elip, parabol và một nhánh hypebol trong hệ tọa độ cực mà ta đã chọn.

§ 4. ĐƯA PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG BẬC HAI VỀ DẠNG CHÍNH TẮC

1.Định nghĩa

Trong mặt phẳng Oxy tập hợp tất cả các điểm M mà tọa độ (x,y) của nó thỏa mãn phương trình: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ (1)

trong đó các hệ số a_{11}, a_{12}, a_{22} không đồng thời bằng 0 được gọi là một đường bậc hai. Phương trình (1) được gọi là phương trình tổng quát của đường bậc hai.

Ta nhận thấy rằng: Elip, Hypebol, Parabol đều là những đường bậc hai. Trong mục này ta sẽ tìm tất cả đường bậc hai có phương trình tổng quát (1).

2.Đưa phương trình tổng quát của đường bậc hai về dạng phương trình không có số hạng chữ nhật xy

2.1.Dùng phép quay, quay hệ trục tọa độ vuông góc Oxy một góc α ta nhận được một hệ trục tọa độ mới Ox'y'; công thức đổi tọa độ có dạng:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \quad (2).$$

Khi thay giá trị của x,y từ (2) vào phương trình (1) ta được:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \qquad (3)$$

Ở đây: $a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha$

$a'_{22} = a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha$

$a'_{12} = - a_{11}\cos\alpha\sin\alpha + a_{12}\cos^2\alpha - a_{12}\sin^2\alpha + a_{22}\cos\alpha\sin\alpha$ (4)

$a'_{13} = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha$

$a'_{23} = - a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha$

$a'_{33} = a_{33}$

Ta chú ý đến hệ số a'_{12} trong phương trình (3), tức là quan tâm đến biểu thức (4).

Nếu a_{12} khác 0 thì ta sẽ tìm góc α thích hợp để $a'_{12} = 0$, điều đó tương đương điều kiện

$$- a_{11}\cos\alpha\sin\alpha + a_{12}\cos^2\alpha - a_{12}\sin^2\alpha + a_{22}\cos\alpha\sin\alpha = 0 \qquad (5)$$

Hay $\cot g2\alpha = \dfrac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$ (6)

Từ (6) ta có $\cot g2\alpha$ xác định với mọi giá trị a_{11}, a_{12}, a_{22} nghĩa là luôn tồn tại góc α để $a'_{12} = 0$. Với góc α vừa tìm được ta tìm các hệ số a'_{ij}.

Từ (5) theo có thể viết:

$$- (a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha)\sin\alpha + (a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha)\cos\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha}{\sin\alpha} = S \qquad (7)$$

Từ (7) suy ra $\begin{cases} (a_{11} - S)\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0 \\ a_{12}\cos\alpha + (a_{22} - S)\sin\alpha = 0 \end{cases}$ (8)

Để tồn tại góc α thì hệ phương trình (8) theo ẩn $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ có nghĩa tức

$$\begin{vmatrix} a_{11} - S & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - S \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad S^2 - (a_{11} + a_{22})S + a_{11}a_{22} - a^2_{12} = 0 \qquad (9)$$

$$\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a^2_{12}) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a^2_{12} \geq 0$$

Vì $a_{12} \neq 0$ nên $\Delta > 0$, do đó phương trình (9) luôn có hai nghiệm phân biệt S_1 và S_2.

Theo hệ phương trình (8) ta có:

$$tg\ \alpha_1 = \frac{S_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{S_1 - a_{22}},$$

$$tg\ \alpha_2 = \frac{S_2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{S_2 - a_{22}} \qquad (10)$$

Từ công thức (8) và công thức (9) theo Viet ta có:

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = a_{11} + a_{22} \\ S_1 S_2 = a_{11}a_{22} - a^2{}_{12} \end{cases} \qquad (11)$$

Từ (11) ta thấy ngay $tg\ \alpha_1\ tg\ \alpha_2 = \dfrac{(S_1 - a_{11})(S_2 - a_{11})}{a_{12}a_{12}} = -1$

Vậy hai hướng chính vuông góc với nhau điều này phù hợp với việc nghiên cứu phương trình bậc 2, và hướng chính của nó là các trục tọa độ.

2.2. Như vậy nếu chọn $tg\alpha_1$ làm trục Ox thì phương của trục Oy là $tg\alpha_2$, ta có thể chọn ngược lại. Vấn đề đặt ra là hướng của các trục như đã biết khi quay trục Ox, Oy về cùng một phía quanh gốc O một góc α thì tương ứng với các véctơ chỉ hướng đơn vị $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ của trục Ox, Oy ta sẽ nhận được $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ tương ứng với trục Ox', Oy' và độ dài $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}'_1| = |\vec{e}'_2| = 1$.

2.3. Không mất tính tổng quát ta chọn $tg\alpha_1$ tương ứng với một nghiệm S_1 nào đó là phương của trục Ox' và chỉ hướng đơn vị $\vec{e}'_1$, ta suy ra

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha_1}}, \quad \sin\alpha_1 = \frac{tg\alpha_1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha_1}} \qquad (12)$$

Hoặc: $$\cos\alpha_1 = \frac{-1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha_1}}, \quad \sin\alpha_1 = \frac{-tg\alpha_1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha_1}} \qquad (13)$$

Thay (12) vào (4) ta nhận được a'_{13}, a'_{23} hay (13) vào (4) ta nhận được a'_{13}, a'_{23} thì chúng chỉ trái dấu nhau nhưng phương trình chính tắc không có gì thay đổi.

2.4. Ta chứng minh

* $S_1 = a'_{11}$: Thật vậy:

(3) $\Rightarrow a'_{11} = (a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha)\cos\alpha + (a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha)\sin\alpha$

(7)) $\Rightarrow a'_{11} = S_1\cos^2\alpha + S_1\sin^2\alpha = S_1$

* $S_2 = a'_{22}$ (3) $\Rightarrow a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}$

(10) $\Rightarrow a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22} = S_1 + S_2$

Mà $S_1 = a'_{11}$ nên $S_2 = a'_{22}$

Để tìm a'_{13} và a'_{23} ta thay (12) vào (4) tức :

$a'_{13} = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha$

$a'_{23} = -a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha$

2.5. Phương trình của S trong hệ trục tọa độ Ox'y'

$$S_1x'^2 + S_2y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0 \qquad (14)$$

3. Đưa phương trình bậc hai về dạng chính tắc:

Từ phương trình (1) cho qua phép biến đổi là phép quay ta đưa về dạng phương trình (14) trong hệ tọa độ Ox'y.' Xét các trường hợp sau:

3.1. $S_1 \neq 0$, $S_2 \neq 0$

Từ (14) có:

$$S_1(x'^2 + 2\frac{a'_{13}}{S_1}x' + \frac{a'^2_{13}}{S_1^2}) - \frac{a'^2_{13}}{S_1} + S_2(y'^2 + 2\frac{a'_{23}}{S_2}y' + \frac{a'^2_{23}}{S_2^2}) - \frac{a'^2_{23}}{S_2} + a_{33} = 0 \qquad (15)$$

$$\Rightarrow S_1\left(x' + \frac{a'_{13}}{S_1}\right)^2 + S_2\left(x' + \frac{a'_{23}}{S_2}\right)^2 + a'_{33} = 0 \quad \text{với } a'_{33} = a_{33} - \frac{a'^2_{13}}{S_1} - \frac{a'^2_{23}}{S_2} \qquad (16)$$

Ta đặt $\begin{cases} X = x' + \dfrac{a'_{13}}{S_1} \\ Y = y' + \dfrac{a'_{23}}{S_2} \end{cases}$ ở đây O' $\left(-\dfrac{a'_{13}}{S_1}, -\dfrac{a'_{23}}{S_2}\right)$

Ta tịnh tiến hệ trục Ox'y' về O'XY ta nhận được phương trình có dạng:

$$\frac{X^2}{\frac{-a'_{33}}{S_1}} + \frac{Y^2}{\frac{-a'_{33}}{S_2}} = 1 \qquad (17)$$

Trong trường hợp $a'_{33} = 0$ thì phương trình có dạng $\dfrac{X^2}{\frac{1}{S_1}} + \dfrac{Y^2}{\frac{1}{S_2}} = 0$ (18)

3.2. Để nhận dạng phương trình (17), (18) ta cần xét dấu S_1, S_2, a'_{33}

1⁰.*Trường hợp 1* : Nếu $S_1.S_2 = a_{11}a_{22} - a^2_{12} > 0$

+ Với $a'_{33} \neq 0$ thì (17) có dạng: $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ (elip)

Hay: $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = -1$ (elip ảo)

+ Với $a'_{33} = 0$ thì (17) có dạng: $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$ (elip điểm)

2⁰. *Trường hợp 2* :Nếu $S_1.S_2 = a_{11}a_{22} - a^2_{12} < 0$

+ Với $a'_{33} \neq 0$ thì (17) có dạng: $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = \pm 1$ (hyperbol)

+ Với $a'_{33} = 0$ thì (17) có dạng: $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$ (hai đường thẳng cắt nhau)

3⁰. *Trường hợp 3* :Nếu $S_1.S_2 = a_{11}a_{22} - a^2_{12} = 0$

***** $S_1 = 0$ và $a'_{13} \neq 0$ thì (14) có dạng: $S_2y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0$(19)

$$S_2\left(y'^2+2\frac{a'_{23}}{S_2}y'+\frac{a'^2_{23}}{S_2^2}\right)+2a'_{13}\left(x'+\frac{a_{33}-\frac{a'^2_{23}}{S_2^2}}{2a'_{13}}\right)=0 \qquad (20)$$

Nếu: $$\begin{cases} X = x'+\dfrac{a_{33}-\frac{a'^2_{23}}{S_2^2}}{2a'_{13}} \\ Y = y'+\dfrac{a'_{23}}{S_2} \end{cases} \quad \text{với O'} \left(-\frac{a_{33}-\frac{a'^2_{23}}{S_2^2}}{2a'_{13}}\ ,\ -\frac{a'_{23}}{S_2}\right) \qquad (21)$$

Khi đó từ (20) và (21) suy ra: $Y^2 = 2pX$ $\quad p = -\dfrac{a'_{23}}{S_2}$ (22)

Vậy trong hệ tọa độ mới O'XY phương trình (1) có dạng $Y^2 = 2PX$ (parabol)

***** $S_1 = 0$ và $a'_{13} = 0$ từ (19) ta có:

$$S_2y'^2 + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0$$

Sau khi dùng phép tịnh tiến $\begin{cases} X = x \\ Y = y'+a'_{23} \end{cases}$ ta thu được: $S_2Y^2 + a_{33} - \dfrac{a'^2_{23}}{S_2} = 0$

Hay $\qquad Y^2 + a'''_{33} = 0 \qquad$ với $\quad a'''_{33} = \dfrac{a_{33}-\frac{a'^2_{23}}{S_2}}{S_2}$ (23)

- Nếu $a'''_{33} > 0$ theo (23) ta có là cặp đường thẳng ảo song song:

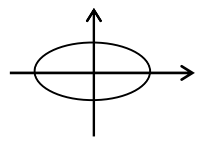
  $Y = \pm i\sqrt{a_3'''}$

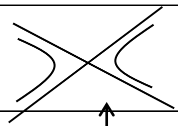
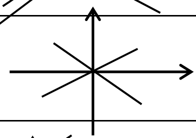
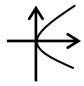
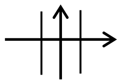
- Nếu $a'''_{33} < 0$ theo (23) ta có là cặp đường thẳng song song:

  $Y = \pm\sqrt{a_3'''}$

- Nếu $a'''_{33} = 0$ theo (23) ta có là cặp đường thẳng trùng nhau $\qquad Y^2 = 0$

4. Từ các kết quả trên ta có bảng sau

STT	Tên đường	Xét $s_1.s_2 = a_{11}a_{22} - a^2_{12}$	Dạng phương trình chính tắc	Đồ thị
1	Elip	$s_1.s_2 > 0$	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2} = 1$	
2	Elip ảo		$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2} = -1$	
3	Điểm thực		$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2} = 0$	
4	Hyperbol			

			$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$	
5	Hai đường thẳng cắt nhau	$s_1.s_2 < 0$	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$	
6	Parabol		$Y^2 = 2pX$	
7	Hai đường thẳng song song	$s_1.s_2 = 0$	$Y^2 - a^2 = 0$	
8	Hai đường thẳng ảo song song		$Y^2 + a^2 = 0$	
9	Hai đường thẳng trùng nhau		$Y^2 = 0$	

5.Ví dụ

Hãy đưa đường bậc hai cho bởi phương trình sau về dạng chính tắc

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$$

Giải

Ta có: $a_{11} = 4$, $a_{22} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = -1$, $a_{23} = -7$, $a_{33} = 7$

+ Lập phương trình đặc trưng: $S^2 - (a_{11} + a_{22})S + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$

$$\Leftrightarrow S^2 - 5S = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S_1 = 0 \\ S_2 = 5 \end{array}\right.$$

+ Xác định góc quay α:

$$\text{tg}\alpha = \frac{S_1 - a_{11}}{a_{12}} = 2 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ và } \sin\alpha = \text{tg}\alpha.\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Nên: $a'_{11} = S_1 = 0$

$a'_{22} = S_2 = 5$,

$a'_{13} = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha = -3\sqrt{5}$

$a'_{23} = -a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha = -\sqrt{5}$

$a'_{33} = a_{33} = 7$

Phương trình đường bậc hai trong hệ tọa độ Ox'y' là:

$$5y'^2 - 6\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 5\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 6\sqrt{5}\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Thực hiện phép tịnh tiến: $\begin{cases} x' = X + \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ y' = Y + \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

Khi đó phương trình đường bậc hai trong hệ tọa độ O'XY là:

$$5Y^2 = 6\sqrt{5}\,X \qquad \text{Hay:} \quad Y^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}X$$

Vậy đây là phương trình chính tắc của parabol.

6. Vẽ đồ thị đường bậc hai cho dạng tổng quát :

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

Phương pháp:

-Đưa phương trình đã cho về dạng chính tắc.

+ Dùng phép quay với góc α thích hợp để khử hạng tử chéo. Viết phương trình mới không có hạng tử chéo trong hệ trục Ox'y'.

+ Đề xuất nhị thức bình phương dùng phép tịnh tiến để đưa phương trình bậc hai về dạng chính tắc trong hệ trục O'XY.

- *Vẽ đồ thị đường bậc hai (1)*

+ Vẽ hệ trục Oxy.

+ Thực hiện phép quay, quay hệ trục Oxy một góc α theo chiều dương ta được hệ trục Ox'y'.

+ Thực hiện phép tịnh tiến gốc O về gốc O'$\left(-\frac{a'_{13}}{S_1}, -\frac{a'_{23}}{S_2}\right)$ ta có hệ trục O'XY.

+ Vẽ đồ thị dạng chính tắc thu được trên hệ trục O'XY.

Ví dụ: Hãy vẽ đường biểu diễn đường bậc hai cho bởi phương trình sau:

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$$

Giải

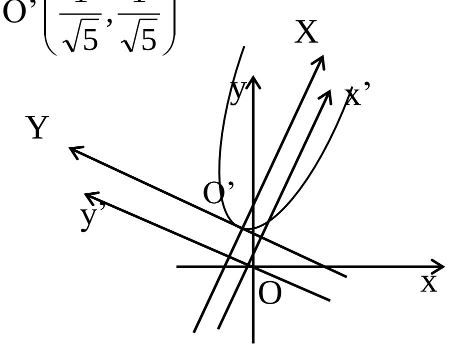
Dựa vào ví dụ 5 ta vẽ đồ thị

Bước 1: Vẽ hệ trục tọa độ Oxy

Bước 2: Thực hiện phép quay với góc quay α với tgα = 2 ta được hệ trục Ox'y'.

Bước 3: Thực hiện phép tịnh tiến gốc O về gốc O'$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

Bước 4: Vẽ đồ thị Parabol $Y^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}X$ trên hệ trục O'XY



§5. ĐƯỜNG KÍNH CỦA ĐƯỜNG BẬC HAI

1. Trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy cho đường bậc hai (C) khác rỗng có phương trình:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

Xét vectơ $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ sao cho L< $\vec{u}$ > không phải là phương tiệm cận và Δ là đường thẳng thay đổi có phương là L< $\vec{u}$ > , tức là có vectơ chỉ phương là $\vec{u}$. Khi đó chúng ta đã biết rằng hoặc Δ không cắt (C) hoặc Δ cắt (C) tại hai điểm (phân biệt hoặc trùng nhau). Nếu Δ cắt (C) tại hai điểm M và N thì đoạn MN được gọi là dây cung của (C) có phương là L< $\vec{u}$ > . Ta hãy tìm quỹ tích các trung điểm I của dây cung MN.

Gọi tọa độ I(x_0, y_0) thì phương trình của Δ là : $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$

Giao điểm M, N của Δ và (C) ứng với hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$Pt^2 + Qt + R = 0$ (2), trong đó $P = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 \neq 0$ vì L < $\vec{u}$ > không phải là phương tiệm cận. Phương trình đó có hai nghiệm trái dấu vì I là trung điểm của MN.

Như vậy Q = 0, hay:

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)x_0 + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)y_0 + a_{13}\alpha + a_{23}\beta = 0. \qquad (2)$$

Nói cách khác tọa độ điểm I thỏa mãn phương trình:

$$a_{11}\alpha + a_{12}\beta)x + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)y + a_{13}\alpha + a_{23}\beta = 0. \qquad (3)$$

Ta chú ý rằng hai hệ số $a_{11}\alpha + a_{12}\beta$ và $a_{12}\alpha + a_{22}\beta$ của phương trình đó không đồng thời bằng không. Như vậy phương trình (2) là phương trình của một đường thẳng.

Tóm lại quỹ tích trung điểm của các dây cung MN có phương L < $\vec{u}$ > nằm trên đường thẳng (3). Đường thẳng này được gọi là đường kính của (C) liên hợp với phương L < $\vec{u}$ >.

2. Nếu đường cong bậc hai (C) có tâm (một hay nhiều tâm) thì ta biết rằng tọa độ tâm phải thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$

Nếu ta nhân phương trình thứ nhất với α và phương trình thứ hai với β rồi cộng lại thì ta được phương trình (3). Điều đó chứng tỏ rằng tâm của đường bậc hai nằm trên mọi đường kính của đường bậc hai đó.

3. Chúng ta hãy chú ý đến vectơ chỉ phương $\vec{u}$' của đường kính (3). Nếu gọi

(α', β') là tọa độ của $\vec{u}$' thì : $\begin{cases} \alpha' = -(a_{12}\alpha + a_{22}\beta) \\ \beta' = a_{11}\alpha + a_{12}\beta \end{cases}$

Nhân cả hai vế của phương trình thứ nhất cho $-\beta'$ phương trình thứ hai cho α' rồi cộng lại ta được: $a_{11}\alpha\alpha' + a_{12}(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + a_{22}\beta\beta' = 0 \qquad (4)$

Nếu hai vectơ $\vec{u}'=(\alpha', \beta')$ và $\vec{u}=(\alpha, \beta)$ có tọa độ thỏa mãn điều kiện (4) thì hai phương L < $\vec{u}$ > và L < $\vec{u}$ ' > được gọi là liên hợp nhau.

Như vậy nếu đường kính liên hợp với một phương L $<\vec{u}>$ (không phải là phương tiệm cận) thì phương của đường kính đó liên hiệp với L $<\vec{u}>$.

Chú ý rằng nếu L $<\vec{u}(\alpha,\beta)>$ là phương tiệm cận thì

$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0$ hay $a_{11}\alpha\ \alpha + a_{12}(\alpha\beta + \alpha\beta) + a_{22}\beta\beta = 0$.

Điều đó có nghĩa là phương tiệm cận của (C) liên hiệp với chính nó và ngược lại phương liên hợp với chính nó là phương tiệm cận.

Xét vectơ $\vec{u} = (\alpha,\beta)$ thỏa điều kiện : $\begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta = 0 \end{cases}$ (5)

Khi đó đẳng thức (4) xảy ra khi mọi phương $\vec{u} = (\alpha',\beta')$. Bởi vậy phương

L$<\vec{u}(\alpha,\beta)>$ sẽ liên hợp với mọi phương bất kì. Phương như vậy được gọi là phương đặc biệt

Hiển nhiên phương đặc biệt là phương tiệm cận (điều ngược lại là không đúng như sẽ thấy ở sau)

Nếu đường bậc hai có tâm duy nhất thì $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$ thì hệ phương trình (5) đối với α, β chỉ có nghiệm $\alpha = \beta = 0$. Vậy đối với đường bậc hai có tâm duy nhất, mọi phương đều không phải là phương đặc biệt.

Đối với đường bậc hai không tâm hay vô số tâm $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ thì hệ phương trình (5) có nghiệm $(\lambda\alpha, \lambda\beta)$ khác nhau một thừa số nhân λ trong đó $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$. Vậy đối với đường bậc hai này, luôn luôn có một đường đặc biệt duy nhất.

4.Ngược lại nếu đường bậc hai (C) có tâm duy nhất thì mọi đường thẳng đi qua tâm và có phương không tiệm cận đều là đường kính.

Thật vậy giả sử d là đường thẳng đi qua tâm có vectơ chỉ phương là

$\vec{u}' = (\alpha',\beta')$ mà L $<\vec{u}'>$ không phải là tiệm cận . Ta gọi L $<\vec{u}(\alpha,\beta)>$ là phương tiệm cận của L $<\vec{u}'>$ phương L $<\vec{u}(\alpha,\beta)>$ được xác định bởi điều kiện (4):

$$\begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta = -\beta' \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta = \alpha' \end{cases}$$

Ta chú ý rằng vì (C) có tâm duy nhất nên $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$. Vậy phương trình trên đối với α, β có nghiệm duy nhất. Vì L $<\vec{u}'>$ không phải là phương tiệm cận nên L $<\vec{u}>$ cũng không phải là phương tiệm cận. Khi đó đường kính liên hợp với phương L $<\vec{u}>$ phải có phương L $<\vec{u}'>$ và đi qua tâm của (C). Vậy đường kính đó chính là d.

Từ kết quả đó ta suy ra:

Mọi đường thẳng đi qua tâm của elip đều là đường kính.

Mọi đường thẳng đi qua tâm của hyperbol và khác với đường tiệm cận đều là đường kính.

Nếu đường bậc hai là cặp hai đường thẳng cắt nhau thì mọi đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng đó nhưng không trùng với chúng đều là đường kính.

Xét trường hợp đường bậc hai không có tâm đó chính là đường parabol mà ta xét nó trong trường hợp chính tắc $y^2 = 2px$.

Nếu ta lấy vectơ $\vec{u}(\alpha,\beta)$ với $\beta \neq 0$ thì phương L $<\vec{u}>$ không phải là phương tiêm cận. Khi đó đường kính liên hợp với phương L $<\vec{u}>$ sẽ có phương trình: $p\beta y - p\alpha = 0$ hay $y = \alpha/\beta$

Như vậy mọi đường kính đều có phương đặc biệt, hay nói cách khác mọi đường kính của parabol đều song song với trục của parabol đó. Ngược lại mọi đường thẳng song song trục parabol đều là đường kính.

Thật vậy nếu đường thẳng có phương trình y = d thì ta chọn phương L$<\vec{u}>$ với $\vec{u}$ = (d,1) thì rõ ràng đường kính liên hợp với L $<\vec{u}>$ chính là đường thẳng y = d.

Đối với trường hợp đường cong bậc hai có vô số tâm tức là trường hợp của cặp đường thẳng song song hoặc trùng nhau ta dễ dàng thấy rằng:

- Đường kính của cặp đường thẳng song song là đường song song cách đều của cặp đường thẳng đó.

- Đường kính của cặp đường thẳng trùng nhau là chính đường thẳng trùng nhau.

5. Đối với đường bậc hai (C) , phương L $<\vec{u}>$ được gọi là phương chính nếu phương vuông góc với nó là phương liên hợp.

Hiển nhiên theo định nghĩa đó thì phương vuông góc với phương chính cũng là phương chính. Ngoài ra phương đặc biệt là phương chính (vì phương đặc biệt liên hiệp với mọi phương do đó nó liên hợp với phương vuông góc với chính nó).

Giả sử đường bậc hai được cho bởi phương trình tổng quát (1) và $\vec{u}(\alpha,\beta)$. Ta tìm điều kiện của α, β để phương L $<\vec{u}>$ là phương chính. Phương vuông góc của L $<\vec{u}>$ là phương L $<\vec{u}\,'>$ trtong đó $\vec{u}\,' = (-\beta,\alpha)$. Phương L $<\vec{u}>$ là phương chính nếu nó liên hợp với L $<\vec{u}\,'>$. Từ điều kiện (4) ta suy ra :

$- a_{11}\alpha\beta + a_{12}(\alpha^2 - \beta^2) + a_{22}\alpha\beta = 0$, hay

$$a_{12}\alpha^2 + (a_{22} - a_{11})\alpha\beta - a_{12}\beta^2 = 0 \qquad (6)$$

Tóm lại phương L $<\vec{u}(\alpha,\beta)>$ là phương chính nếu α, β thỏa điều kiện (6).

Nếu $a_{12} = 0$ và $a_{22} = a_{11}$thì mọi cặp số (α,β) đều thỏa (6) nên mọi phương của nó đều là phương chính. Nhưng khi đó (C) là đường tròn , vậy đối với đường tròn mọi phương của nó đều là phương chính.

Nếu $a_{12} = 0$ và $a_{22} \neq a_{11}$thì phương trình (6) trở nên $(a_{22} - a_{11})\alpha\beta = 0$ và ta có hai phương chính là L $<(0,\beta)>$ và L $<(\alpha,0)>$hai phương này đều vuông góc nhau.

Nếu $a_{12} \neq 0$ thì phương trình (6) là phương trình bậc hai đối với tỉ số $\alpha : \beta$ (chú ý rằng $\beta \neq 0$ vì nếu $\beta = 0$ thì từ (6) suy ra $\alpha = 0$) . Biệt thức của (6) là

$\Delta = (a_{22} - a_{11})^2 - a_{12}^2 > 0$ nên phương trình (6) có hai nghiệm phân biệt. Do đó, nếu đường bậc hai không là đường tròn thì đối với nó có hai phương chính (hai phương này liên hợp với nhau và vuông góc với nhau).

Đối với đường bậc hai không có tâm hoặc vô số tâm thì phương đặc biệt (đồng thời là phương tiệm cận duy nhất) là phương chính. Phương chính thứ hai của là phương vuông góc với phương đặc biệt.

6. Một đường kính của đường bậc hai (C) được gọi là đường kính chính nếu nó liên hợp với phương chính.

Rõ ràng là theo định nghĩa đó thì mỗi đường kính chính của đường bậc hai là trục đối xứng với (C). Thật vậy, nếu d là đường kính chính của (C) liên hợp với phương L $<\vec{u}>$. Khi đó L $<\vec{u}>$ không phải là phương tiệm cận và mỗi dây cung có phương L $<\vec{u}>$ đều bị d chia đôi. Nhưng các dây đó lại vuông góc với d nên hai đầu mút của hai dây cung phải đối xứng với nhau qua d.

Nếu (C) là đường tròn thì vì mọi phương đều là phương chính (và không là phương tiệm cận) và mọi đường kính đều đi qua tâm đường tròn nên ta suy ra: Mọi đường thẳng đi qua tâm của đường tròn đều là đường kính chính.

Nếu (C) là đường bậc hai có tâm duy nhất thì hiển nhiên phương chính không phải là phương tiệm cận cho nên ta suy ra chúng có hai đường kính chính (vuông góc với nhau) , tức là các đường bậc hai có tâm duy nhất nếu không phải là đường tròn thì luôn luôn có hai (và chỉ có hai) trục đối xứng

Nếu (C) là đường bậc hai không có tâm hoặc có vô số tâm thì phương chính là phương đặc biệt. Vì phương này là phương tiệm cận nên không có đường kính nào liên hiệp với nó. Phương chính thứ hai là phương vuông góc với phương đặc biệt. Khi đó đường kính liên hiệp với phương này chính là trục đối xứng của đường bậc hai nói trên. Vậy nếu đường bậc hai không có tâm hoặc vô số tâm thì chỉ có một trục đối xứng duy nhất mà phương của nó là phương tiệm cận.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. Trong mỗi trường hợp sau đây, hãy xác định đường cong cho bởi phương trình

   a. $(x^2 + y^2 - 4)(x - 1) = 0$

   b. $x^3 + x^2 - 2x = 0$

   c. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$

   d. $\begin{cases} x = 5t^2 - 1 \\ y = 10t^2 + 4 \end{cases}$

2.Hai thanh kim loại tương ứng chuyển động quay xung quanh hai điểm cố định A, B với AB = 2a. Trong khi quay hai thanh luôn cắt và vuông góc với nhau. Hãy tìm quỹ tích giao điểm M của hai thanh kim loại.

3.Cho A(a,0), B(-a,0) và hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt đi qua A và B cắt trục Oy tại hai điểm có tọa độ tương ứng là b_1, b_2 sao cho $b_1.b_2 = a^2$. Tìm phương trình quỹ đạo chuyển động của điểm M là giao của d_1, d_2 khi chúng quay xung quanh A và B.

4.Cho đường tròn đường kính OA = 2a. Qua A vẽ tiếp tuyến AT, qua O vẽ dây cung bất kỳ cắt đường tròn tại B và cắt tiếp tuyến AT tại C. Trên tia OB lấy điểm M sao cho đoạn OM = BC. Khi quay OB xung quanh O, điểm M vạch nên đường cong gọi là đường Cycloit. Hãy viết phương trình của đường Cycloit và vẽ sơ lược đồ thị của nó.

5.Đoạn thẳng AB = 2a chuyển động sao cho các điểm A và B luôn chạy trên hai đường thẳng cố định vuông góc với nhau tại O, gọi M là chiếu của O trên AB. Viết phương trình quỹ tích của M.

6.Một đoạn thẳng AB = a ,trượt trên hai trục tọa độ Ox, Oy qua A và B vẽ hai đường thẳng AC và BC tương ứng song song với hại trục Ox, Oy và cắt nhau tại C, từ C hạ đường vuông góc xuống AB tại M. Viết phương trình quỹ tích điểm M.

7.Đường tròn bán kính r = a chuyển động lăn đều không trượt trên đường thẳng cố định. Tìm quỹ đạo chuyển động của điểm M nằm trên đường tròn đó.

8.Trong hệ trục tọa độ Oxy cho một tia Ox' cắt đường tròn $x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$ tại D, và cắt đường thẳng y = a tại E. Qua D và E vẽ hai đường thẳng tương ứng song song Ox và Oy chúng cắt nhau tại M. Viết phương trình chuyển động của M khi tia Ox' quay quanh gốc O .

9.Vẽ sơ lược đồ thị của phương trình cực sau:

a. $r = \sin 3\theta$ b. $r = \cos\frac{\theta}{2}$ c. $r = \cos 2\theta$ d. $r = 1 + 2\cos\theta$ c. $r = \mathrm{tg}\theta$

10.Tìm giao điểm của hai đường cong sau:

a. $r^2 = 4\cos\theta$ và $r = 1 - \cos\theta$ b. $r = \sin 2\theta$ và $r = -2\cos\theta$

11. Đưa các đường bậc hai cho dạng tổng quát sau về dạng chính tắc và vẽ đồ thị.

1. $7x^2 - 8xy + y^2 - 16x - 2y - 51 = 0$
2. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$
3. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y = 0$
4. $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$
5. $9x^2 - 6xy + y^2 - 4x + 8y - 9 = 0$
6. $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$

Chương III MẶT BẬC HAI TRONG KHÔNG GIAN

§1. PHƯƠNG TRÌNH CỦA MẶT

1.Định nghĩa

Trong không gian Oxyz cho một mặt S, phương trình: F(x,y,z) =0 (1) được gọi là phương trình của mặt S nếu điểm M thuộc S khi và chỉ khi tọa độ (x,y,z) của nó thỏa phương trình đó . Ta nói rằng mặt S được xác định bởi phương trình F(x,y,z) = 0.

Như vậy muốn thiết lập phương trình của một mặt ta phải chuyển từ định nghĩa hình học của nó sang những biểu thức liên quan đến tọa độ của một điểm bất kỳ thuộc mặt.

2.Phương trình tham số

Trong không gian Oxyz cho một mặt S, một hệ phương trình $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v) \end{cases}$

(2) được gọi là phương trình của mặt S nếu điểm M thuộc S khi và chỉ khi tồn tại hai gía trị u, v sao cho tọa độ của điểm M được cho bởi biểu thức (2). Phương trình (2) được gọi là phương trình tham số của mặt S.

3.Ví dụ

Mặt cầu S tâm I(a, b,c) bán kính R có phương trình tổng quát là:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \qquad (3)$$

Ta sẽ chứng minh phương trình tham số của mặt cầu là:

$$\begin{cases} x = a + R.\cos\varphi.\sin\theta \\ y = b + R.\sin\varphi.\sin\theta \\ z = c + R.\cos\theta \end{cases} \qquad (4)$$

Thật vậy: Giả sử M(x,y,z) có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình (4). Khi đó : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2\cos^2\varphi.\sin^2\theta + R^2\sin^2\varphi.\sin^2\theta + R^2.\cos^2\theta = R^2.\sin^2\theta + R^2.\cos^2\theta = R^2$ nên điểm M thuộc mặt cầu S.

Ngược lại , giả sử M(x,y,z) thuộc mặt cầu S tức là :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \qquad (3)$$

hay : $$\left(\frac{x-a}{R}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{R}\right)^2 + \left(\frac{z-c}{R}\right)^2 = 1.$$

Ta có thể chọn một góc θ sao cho :

$$\frac{z-c}{R} = \cos\theta \quad \text{và} \quad \left(\frac{x-a}{R}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{R}\right)^2 = \sin^2\theta .$$

Như vậy : $$z = c + R.\cos\theta \qquad (4)$$

và $$\left(\frac{x-a}{R\sin\theta}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{R\sin\theta}\right)^2 = 1. \qquad (5)$$

Từ (5) ta lại suy ra có thể tìm được góc φ sao cho:

$$\frac{x - a}{R\sin\theta} = \cos\varphi \quad ; \quad \frac{y - b}{R\sin\theta} = \sin\varphi .$$

Vậy : $\begin{cases} x = a + R.\cos\varphi.\sin\theta \\ y = b + R.\sin\varphi.\sin\theta \\ z = c + R.\cos\theta \end{cases}$ (4) là phương trình tham số của mặt cầu S .

4.Mặt đại số

Một mặt S được gọi là mặt đại số nếu phương trình của S có dạng :

F(x,y,z) = $A_1x^{k_1}y^{l_1}z^{m_1} + A_2x^{k_2}y^{l_2}z^{m_2} + ... + A_sx^{k_s}y^{l_s}z^{m_s}$, trong đó A_i khác 0 , k_i , l_i ,m_i là những số nguyên không âm.

Số lớn nhất trong các số $k_i + l_i + m_i$ được gọi là bậc của mặt đạisố S. Nếu số lớn nhất đó là n thì ta nói rằng mặt S là mặt số bậc n .

5.Phương trình của đường trong không gian

5.1.Định nghĩa

Giả sử trong hệ toạ độ Oxyz cho hai mặt S_1 và S_2 có phương trình là: $F_1(x,y,z)=0$ và $F_2(x,y,z) = 0$. Khi đó giao tuyến của S_1 và S_2 là một đường cong (γ) mà tọa độ của điểm nằm trên đường cong phải thỏa mãn đồng thời hai phương trình trên. Như vậy hệ phương trình : $\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$ là phương trình của đường cong (γ).

Nói chung mỗi đường trong không gian đều xác định bởi một hệ hai phương trình , mỗi phương trình biểu thị cho một mặt .

5.2.Ví dụ

Ta hãy xét đường γ được cho bởi hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Phương trình đầu biểu thị cho ta mặt cầu tâm O, bán kính R; còn phương trình sau một mặt phẳng đi qua O. Như vậy γ là một đường tròn tâm O, bán kính R và nằm trong mặt phẳng $x + z = 0$.

Hãy rút z từ phương trình thứ hai và thay vào phương trình thứ nhất ta đi đến một hệ phương trình tương đương :

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - R^2 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Phương trình đầu của hệ mới vì không chứa z nên biểu thị cho ta một mặt trụ tròn xoay mà đường chuẩn của nó nằm trong mặt phẳng Oxy và có phương trình

$$2x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Như vậy đường tròn γ có thể xem là giao của mặt trụ đó với mặt phẳng

$$x + z = 0.$$

Chú ý rằng phương trình : $2x^2 + y^2 - R^2 = 0$ trong mặt phẳng Oxy là một elip, nó chính là hình chiếu vuông góc của đường tròn γ trên mặt phẳng Oxy.

6.Mặt trụ

6.1.Định nghĩa

Trong hệ tọa độ Oxyz cho đường cong $(\gamma):\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ và vectơ $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$. Khi đó tập hợp tất cả các đường thẳng (Δ) đi qua điểm M thuộc (γ) có phương cố định là vectơ $\vec{a}$ lập thành mặt gọi là mặt trụ.

Trong đó: (γ) gọi là đường chuẩn, (Δ) gọi là đường sinh của mặt trụ.

6.2.Phương trình

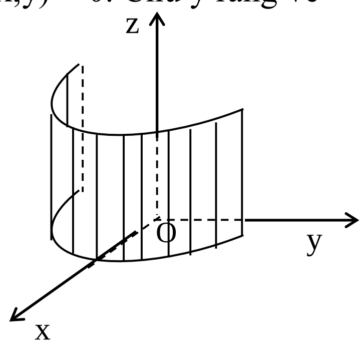
Giả sử M(x0,y0,y0) ∈ (γ) khi đó ta có: $\begin{cases} F_1(x_0,y_0,z_0)=0 \\ F_2(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases}$ (1)

Và phương trình đường sinh (Δ) : $\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình của mặt trụ (S) có dạng: F(x,y,z) = 0

Trường hợp đặc biệt

Trong hệ tọa độ Oxyz xét mặt S cho bởi phương trình F(x,y) = 0. Chú ý rằng vế trái của phương trình vắng mặt ẩn số z .



Nếu lấy điểm $M_o(x_o,y_o)$ thuộc mặt S tức là: F (x_o,y_o) = 0 thì đường thẳng d đi qua M_o và song song Oz phải nằm hoàn toàn trên mặt S. Thật vậy, một điểm M bất kỳ của d có tọa độ (x_o,y_o,z) và bởi vậy nó thỏa mãn phương trình F(x,y) = 0 .

Nếu trong mặt phẳng Oxy lấy đường γ có phương trình F(x,y) = 0 thì mặt S xem như được tạo thành bởi những đường thẳng d song song với Oz và đi qua một điểm của γ. Mặt S như trên được gọi là mặt trụ, đường γ gọi là gọi là đường chuẩn của mặt trụ, còn các đường thẳng d nằm trên S được gọi là đường sinh của mặt trụ.

Tương tự như vậy các phương trình F(x,z) = 0 hoặc F(y,z) = 0 biểu thị những mặt trụ có đường sinh lần lượt song song với Oy và Ox.

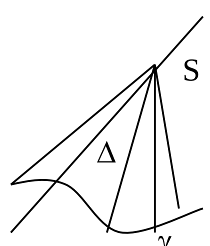
7.Mặt nón

7.1.Định nghĩa

Trong hệ tọa độ Oxyz cho đường cong $(\gamma):\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ và điểm S(a,b,c). Khi đó tập hợp tất cả các đường thẳng (Δ) đi qua điểm S và một điểm M thuộc (γ) lập thành mặt gọi là mặt nón.

Trong đó: (γ) gọi là đường chuẩn.

(Δ) gọi là đường sinh, S là đỉnh mặt nón.



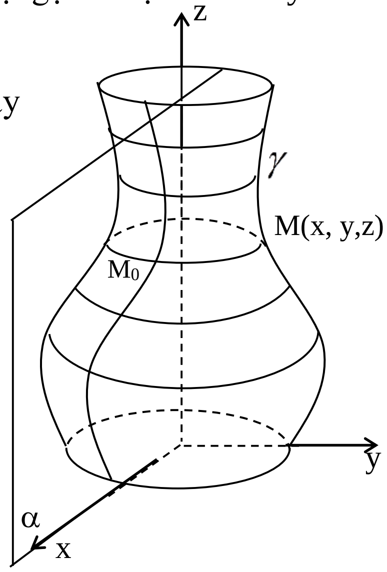
7.2.Phương trình

Tương tự phương trình mặt trụ

8.Mặt tròn xoay

8.1.Định nghĩa

Trong mặt phẳng α cho một đường (γ) và một đường thẳng d. Khi quay mặt phẳng α quanh d trong không gian thì đường (γ) vạch nên một mặt gọi là mặt tron xoay.



Trong đó: d được gọi là trục của mặt tròn xoay, đường cong (γ) được gọi là đường sinh của mặt tròn xoay

Từ định nghĩa, ta nhận thấy nếu cắt mặt tròn xoay bằng một mặt phẳng vuông góc trục quay thì thiết diện là đường tròn mà tâm của nó nằm trên trục của mặt tròn xoay đó.

8.2.Phương trình của mặt tròn xoay

Chọn hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz sao cho Oz trùng với đường thẳng d, còn mặt phẳng Oxz trùng với mặt phẳng α.

Giả sử trong mặt phẳng α đối với hệ tọa độ Oxz đường cong (γ) có phương trình F(x,z)=0 .

Ta sẽ chứng minh phương trình của mặt tròn xoay S đã cho là :$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$.

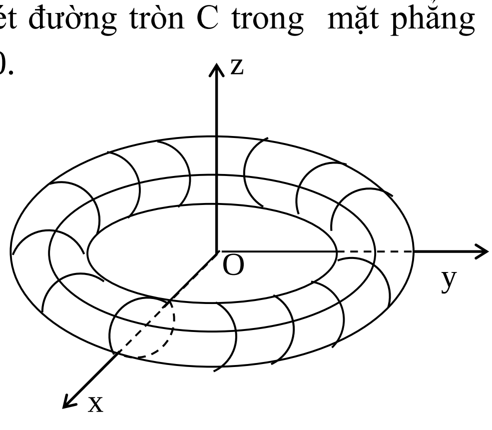
Thật vậy, lấy một điểm M(x,y,z) thuộc mặt tròn xoay S, và xét mặt phẳng β đi qua M và vuông góc với d. Khi đó mặt phẳng β cắt mặt tròn xoay S theo một đường tròn, đường tròn này cắt đường γ tại M_o .Giả sử đối với hệ tọa độ Oxz của mặt phẳng α, M_o có tọa độ (x_o,z_o). Hiển nhiên là $z_o = z$ và $x_o^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$

(bằng bán kính của đường tròn). Vì M_o thuộc γ nên $F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$.

8.3.Ví dụ

Cho hệ tọa độ Descartes vuông gócOxyz. Xét đường tròn C trong mặt phẳng Oxz có phương trình : $(x - a)^2 + z^2 - R^2 = 0$.

(Đường tròn C có tâm (a, 0) và có bán kính R).



Khi cho đường tròn C quay xung quanh trục Oz ta có một mặt tròn xoay, gọi là mặt xuyến.

Đối với hệ tọ độ Oxyz phương trình cuả mặt xuyến là:

$(\pm\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 - R^2 = 0$.

Nếu a = 0 thì phương trình trên trở thành:

$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ và

ta được mặt cầu tâm O(0,0,0) có bán kính R. Vậy mặt cầu là mặt tròn xoay sinh bởi một đường tròn khi quay quanh đường kính của nó.

§2. MẶT TRÒN XOAY BẬC HAI

1.Định nghĩa

Mặt tròn xoay bậc hai là mặt tròn xoay nhận được do quay đường bậc hai quanh trục đối xứng của nó.

2.Elipxoit tròn xoay

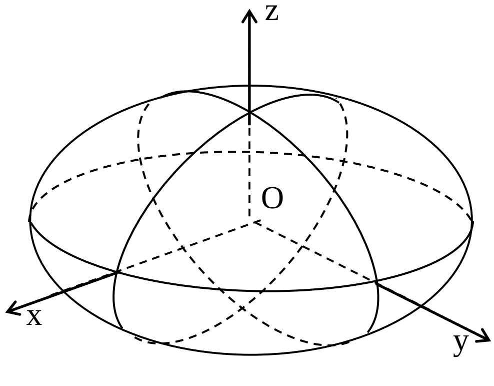
2.1.Định nghĩa

Mặt tròn xoay sinh bởi một đường elip khi quay xung quanh một trục đối xứng cuả nó sẽ gọi là mặt elipxoit tròn xoay.

2.2.Phương trình

Giả sử trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz, cho đường elip nằm trong mặt phẳng Oxz và có phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (1)$$



Nếu cho elip đó quay xung quanh trục Oz thì như đã nói ở mục trước ta có phương trình cuả elip xoit tròn xoay là:

$$\frac{(\pm\sqrt{x^2 + y^2})^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

hay $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (2)$$

Đó là phương trình chính tắc của mặt elipxoit tròn xoay.

Cũng như mọi mặt tròn xoay khác nếu ta cắt elip xoit tròn xoay bởi một mặt phẳng song song với mặt phẳng Oxy thì giao tuyến (nếu có) sẽ là một đường tròn. Nếu mặt phẳng đó có phương trình z = h thì đường tròn giao tuyến sẽ có phương trình:

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2} \end{cases}$$

Hiển nhiên muốn có giao tuyến cần có điều kiện $|h| \leq c$.

Nếu cắt cắt elip xoit tròn xoay bởi một mặt phẳng song song với mặt phẳng Oxz có phương trình y = h thì giao tuyến (nếu có) sẽ có phương trình:

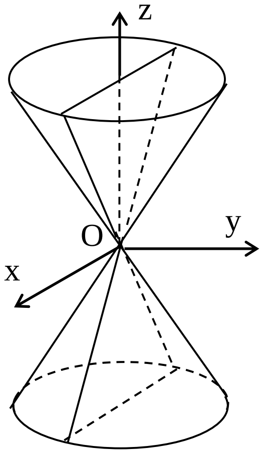
$$\begin{cases} y = h \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{h^2}{a^2} \end{cases}$$

Nếu $|h| \le a$ thì phương trình trên xác định cho ta một đường elip nằm trong mặt phẳng $y = h$.

Tương tự nếu $|h| \le a$ thì giao tuyến cuả elipxoit và mặt phẳng $x = h$ cũng là một đường elip nằm trong mặt phẳng $x = h$.

3.Mặt nón tròn xoay

3.1.Định nghĩa



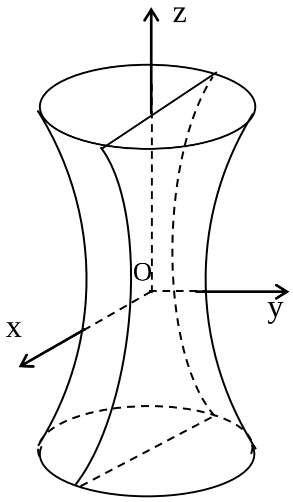
Cho một đường thẳng a cắt đường thẳng Δ tại O và không vuông góc với Δ.. Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng a khi quay xung quanh đường thẳng Δ sẽ gọi là mặt nón tròn xoay.

3.2.Phương trình

Chọn hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz sao cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng Oxz và có phương trình :

$cx = az$ hay $cx - az = 0$.

Khi quay a xung quanh trục Oz ta được mặt nón tròn xoay có phương trình: $\pm\sqrt{x^2 + y^2}.c - az = 0$



hay: $\pm\sqrt{x^2 + y^2}.c = az$

hay: $c^2x^2 + c^2y^2 - a^2z^2 = 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (3)$$

4.Hypeboloit một tầng tròn xoay

4.1.Định nghĩa

Mặt tròn xoay sinh bởi một đường hyprbol khi quay xung quanh một trục đối xứng cuả nó và không cắt nó sẽ gọi là mặt hyprboloit một tầng tròn xoay.

4.2. Phương trình

Giả sử trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz, cho đường hypebol nằm trong mặt phẳng Oxz và có phương trình :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (4)$$

Nếu quay hypebol đó xung quanh trục Oz, thì tương tự như trên, ta có phương trình cuả mặt hypebol loit một tầng tròn xoay là :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (5)$$

Ta để ý đến hai đường tiệm cận $z = \frac{c}{a}x$, $z = -\frac{c}{a}x$ cuả hypebol (4) . Khi quay xung quanh trục Oz hai đường tiệm cận này và sinh ra cùng một mặt nón tròn xoay có phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (6)$$

Mặt nón (6) được gọi là nón tiệm cận của hypeboloit một tầng tròn xoay.

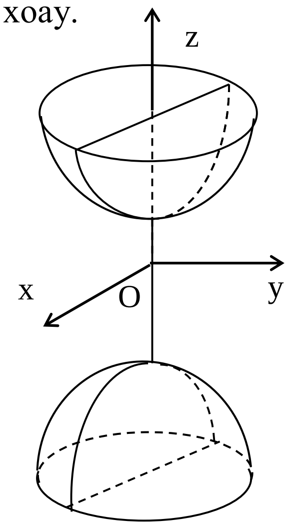
Hiển nhiên cắt hypeboloit một tầng tròn xoay (5) bằng một mặt phẳng song song với mặt phẳng Oxy ta được một đường tròn.

5.Hypeboloit hai tầng tròn xoay

5.1Định nghĩa

Mặt tròn xoay sinh bởi một đường hyprbol khi quay xung quanh một trục đối xứng cuả nó và cắt nó sẽ gọi là mặt hyprboloit hai tầng tròn xoay.

5.2.Phương trình



Giả sử trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz, cho đường hypebol nằm trong mặt phẳng Oxz và có phương trình :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (7)$$

Nếu quay hypebol đó xung quanh trục Oz, thì tương tự như trên,ta có phương trình cuả mặt hypeboloit hai tầng tròn xoay là:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (8)$$

Ta để ý đến hai đường tiệm cận:

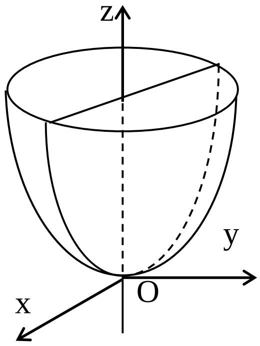
$z = \frac{c}{a}x$, $z = -\frac{c}{a}x$ cuả hypebol (7). Khi quay xung quanh trục Oz hai đường tiệm cận này và sinh ra cùng một mặt nón tròn xoay có phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (6)$$

Mặt nón (6) được gọi là nón tiệm cận của hypeboloit hai tầng tròn xoay (8).

Hiển nhiên cắt hypeboloit hai tầng tròn xoay (8) bằng một mặt phẳng song song với mặt phẳng Oxy ta được một đường tròn.

6.Paraboloit tròn xoay



6.1.Định nghĩa

Mặt tròn xoay sinh bởi một đường parabol khi quay xung quanh trục đối xứng cuả nó sẽ gọi là mặt paraboloit tròn xoay.

6.2.Phương trình

Giả sử trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz, cho đường parabol nằm trong mặt phẳng Oxz và có phương trình :

$x^2 = 2pz$; $(p > 0)$ (9)

Nếu quay parabol đó xung quanh trục Oz, thì tương tự như trên, ta có phương trình cuả mặt paraboloit tròn xoay là :

$$x^2 + y^2 = 2pz \quad \text{hay} \quad \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 2z. \qquad (10)$$

§3. MẶT BẬC HAI

1. Định nghĩa phép co

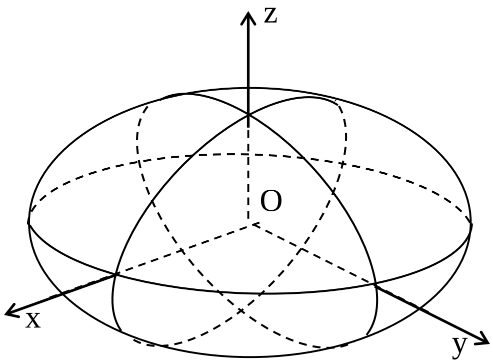
Trong không gian Oxyz cho điểm $M(x_o,y_o,z_o)$, ta xác định điểm $M'(x,y,z)$ sao cho :

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = k.y_0 \\ z = z_0 \end{cases} \qquad (1)$$

trong đó k là một số dương cố định. Khi đó phép tương ứng biến điểm M thành điểm M' được gọi là phép co về mặt phẳng Oxz theo hệ số k.

Sau đây chúng ta dùng phép co để biến mặt bậc hai tròn xoay thành mặt bậc hai.

2.Mặt elipxoit



Trong không gian Oxyz cho mặt elipxoit tròn xoay có phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Giả sử điểm $M(x_o,y_o,z_o)$ thuộc mặt elipxoit tròn xoay nên

$$\frac{x_0^{\ 2}}{a^2} + \frac{y_0^{\ 2}}{a^2} + \frac{z_0^{\ 2}}{c^2} = 1 \qquad (2)$$

ta xác định điểm $M'(x,y,z)$ qua phép co về mặt phẳng Oxz hệ số k.

Thay (1) vào (2), ta được:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{k^2a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Đặt ka = b, thì như vậy các điểm M' sẽ thuộc mặt :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (3)$$

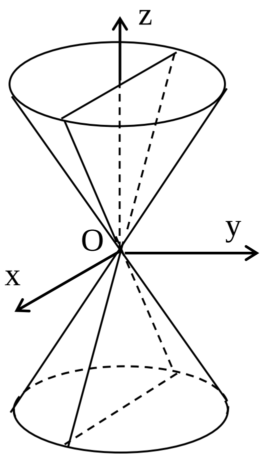
Mặt có phương trình (3) gọi là mặt elipxoit. Phương trình (3) gọi là phương trình chính tắc của elipxoit.

Mặt elipxoit (2) có ba trục đối xứng là ba trục tọa độ, ba mặt phẳng đối xứng là ba mặt phẳng tọa độ, và có tâm đối xứng là gốc tọa độ.

Hiển nhiên nếu hai trong ba số a, b, c bằng nhau thì (3) xác định một elipxoit tròn xoay. Nếu a = b = c thì (3) xác định cho ta một mặt cầu.

Dễ dàng thấy rằng nếu ta cắt mặt (3) bởi một mặt phẳng song song với một mặt phẳng tọa độ nào đó thì giao tuyến nếu có là một elip.

Một cách tổng quát nếu ta cắt mặt (3) bởi một mặt phẳng thì giao tuyến nếu có là một đường elip. Thật vậy, vì mặt elipxoit là mặt đại số bậc hai nên khi cắt bởi một mặt phẳng ta được một đường đại số bậc hai.Vì mặt elipxoit giới nội nên đường bậc hai đó giới nội vậy nó là đường elip.



3.Mặt nón elip

Trong không gian Oxyz cho mặt nón tròn xoay có phương trình:

$$c^2x^2 + c^2y^2 - a^2z^2 = 0$$

Giả sử điểm $M(x_o,y_o,z_o)$ thuộc mặt nón tròn xoay nên

$$c^2x^2_o + c^2y^2_o - a^2z^2_o = 0 \qquad (4)$$

ta xác định điểm M'(x,y,z) qua phép co về mặt phẳng Oxz hệ số k.

Thay (1) vào (4), ta được:

$$c^2x^2 + c^2\left(\frac{y}{k}\right)^2 - a^2z^2 = 0$$

Đặt ka = b, thì như vậy các điểm M' sẽ thuộc mặt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (5)$$

Mặt có phương trình (5) gọi là mặt nón elip. Phương trình (5) gọi là phương trình chính tắc cuả mặt nón elip.

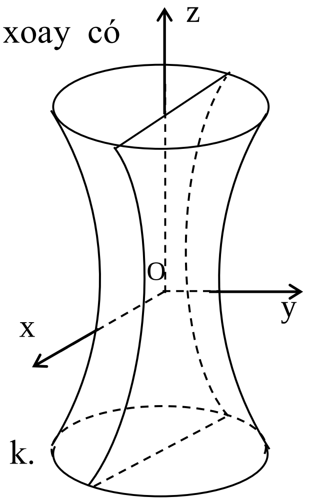
Khi cắt mặt nón (5) bởi một mặt phẳng song song với Oxy, tức mặt z =h ta được giao tuyến là một đường elip:

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} \end{cases} \qquad (6)$$

Bởi vậy, mặt nón elip có thể xem như là một mặt nón đỉnh O và đường chuẩn là đường elip (6) với h là một số cố định.

4.Mặt hypeboloit một tầng

Trong không gian Oxyz cho mặt hypeboloit một tầng tròn xoay có phương trình:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Giả sử điểm M(x_o,y_o,z_o) thuộc mặt hypeboloit môt tầng tròn xoay nên

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{a^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1 \qquad (7)$$

ta xác định điểm M'(x,y,z) qua phép co về mặt phẳng Oxz hệ số k. Thay (1) vào (7), ta được:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{k^2a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Đặt ka = b, thì như vậy các điểm M' sẽ thuộc mặt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (8)$$

Mặt có phương trình (8) gọi là mặt hypeboloit môt tầng. Phương trình (8) gọi là phương trình chính tắc cuả mặt hypeboloit môt tầng.

Đối với mặt (8) nhận mặt nón elip**:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ làm nón tiệm cận.

Một mặt phẳng đi qua Oz cắt mặt (8) theo một đường hypebolvà cắt nón tiệm cận theo hai đường thẳng là hai đường tiệm cận cuả hypebol đó.

Nếu ta cắt mặt (8) bởi một mặt phẳng z = h thì ta được một elip:

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2} \end{cases} \qquad (9)$$

Nếu h = 0 thì phương trình (9) xác định cho ta một elip nằm trong mặt phẳng Oxy : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và elip này được gọi là elip họng cuả hypeboloit một tầng.

Nếu ta cắt mặt (8) bởi một mặt phẳng y = h thì ta đượcgiao tuyến:

$$\begin{cases} y = h \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{h^2}{b^2} \end{cases} \qquad (10)$$

Nếu h $\neq$ ±b thì phương trình (10) xác định cho ta một hypebol, có hai đường tiệm cận là: z = $\frac{c}{a}$x, z = -$\frac{c}{a}$x.

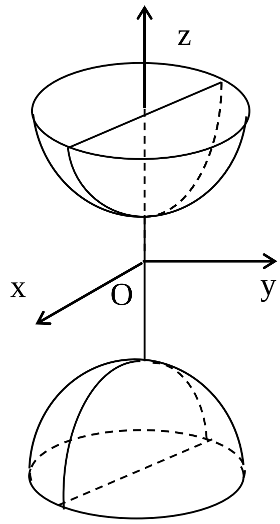
Nếu h = ±b thì phương trình (10) xác định cho ta cặp đường thẳng mà chiếu lên mặt phẳng Oxy là hai đường tiệm cận trên.

Hoàn toàn tương tự nếu ta xét giao tuyến cuả mặt (8) bởi mặt phẳng x = h.

5.Mặt hybeboloit hai tầng

Trong không gian Oxyz cho mặt hypeboloit hai tầng tròn xoay có phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



Giả sử điểm $M(x_o,y_o,z_o)$ thuộc mặt hypeboloit hai tầng tròn xoay nên

$$\frac{x_0^{\ 2}}{a^2} + \frac{y_0^{\ 2}}{a^2} - \frac{z_0^{\ 2}}{c^2} = -1 \qquad (11)$$

ta xác định điểm M'(x,y,z) qua phép co về mặt phẳng Oxz hệ số k.

Thay (1) vào (11), ta được:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{k^2a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Đặt ka = b, thì như vậy các điểm M' sẽ thuộc mặt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (12)$$

Mặt có phương trình (12) gọi là mặt hypeboloit hai tầng. Phương trình (12) gọi là phương trình chính tắc của mặt hypeboloit hai tầng.

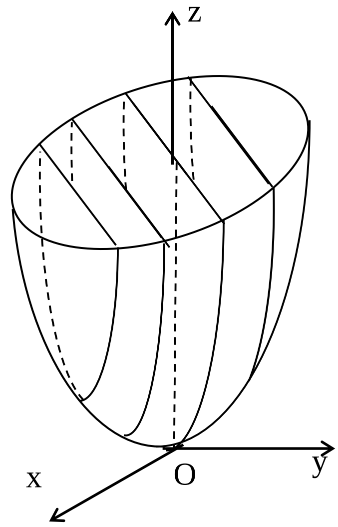
Đối với mặt (12) nhận mặt nón elip **:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ làm nón tiệm cận.

Một mặt phẳng đi qua Oz cắt mặt (12) theo một đường hypebolvà cắt nón tiệm cận theo hai đường thẳng là hai đường tiệm cận cuả hypebol đó.

Nếu ta cắt mặt (12) bởi một mặt phẳng z = h (nếu $|h| \geq c$) thì ta được một elip:

$$\begin{cases} z = h \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{h^2}{c^2} \end{cases} \qquad (13)$$

Nếu ta cắt mặt (8) bởi một mặt phẳng y = h hoặc x = h thì dễ thấy rằng giao tuyến là những hypebol.



6.Mặt paraboloit eliptic

Trong không gian Oxyz cho mặt paraboloit tròn xoay có phương trình:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 2z. \qquad (14)$$

Dùng phép co về mặt phẳng Oxz với hệ số k (k > 0) và đặt q = kp, mặt (14) trở thành mặt có phương trình:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z. \qquad (15)$$

Mặt có phương trình (15) gọi là mặt paraboloit eliptic. Phương trình (15) gọi là phương trình chính tắc cuả mặt paraboloit eliptic.

Nếu ta cắt mặt (15) bởi một mặt phẳng z = h (nếu h > 0) thì ta được giao tuyến:

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2h \end{cases}$$ xác định một elip nằm trên mặt phẳng z = h và có hai bán trục là $\sqrt{2ph}$ và $\sqrt{2qh}$.

Nếu cắt mặt (15) bởi một mặt phẳng x = h thì ta được giao tuyến:

$$\begin{cases} x = h \\ y^2 = 2qz - \dfrac{q}{p}h^2 \end{cases}$$ xác định một parabol nằm trên mặt phẳng x = h.

Tương tự như vậy, nếu ta cắt mặt (15) bởi mặt phẳng y = h thì giao tuyến cũng là đường parabol.

***Chú ý*:** Ta có thể xây dựng mặt paraboloit eliptic một cách khác:

Ta xét mặt paraboloit eliptic có phương trình (15) . Giao cuả nó và mặt phẳng Oxz là parabol $x^2 = 2pz$ nằm trong mặt phẳng đó. Gọi parabol đó là P. Giao của mặt (15) và mặt phẳng x = h, theo trên là parabol có phương trình:

$$\begin{cases} x = h \\ y^2 = 2qz - \dfrac{q}{p}h^2 \end{cases}$$ gọi là parabol P_h (nó phụ thuộc vào giá trị h). Các parabol P_h có các tính chất sau:

a.Các đỉnh cuả parabol P_h đều nằm trên parabol P và các trục cuả parabol P_h đều song song với Oz.

b.Các parabol P_h đều là ảnh của parabol $y^2 = 2qz$, x = 0 qua một phép tịnh tiến.

Do đó mặt paraboloit eliptic có thể xem như một mặt sinh ra khi cho parabol $y^2 = 2qz$, x = 0 chuyển động tịnh tiến sao cho đỉnh của nó luôn luôn nằm trên parabol $x^2 = 2pz$, y = 0.

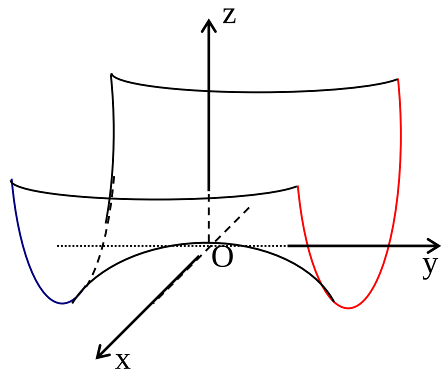
7.Mặt paraboloit hypebolic

Trong không gian Oxyz cho mặt có phương trình:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z. \quad (16)$$

với p > 0, q > 0.

gọi là mặt paraboloit hypebolic hoặc là mặt yên ngựa.



Mặt (16) nhận các mặt phẳng Oxz, Oyz là các mặt phẳng đối xứng và trục Oz làm trục đối xứng.

Nếu ta cắt mặt (16) bởi một mặt phẳng z = h thì ta được giao tuyến có phương trình:

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h \end{cases}$$

Nếu h = 0 thì giao tuyến là cặp đường thẳng nằm trong mặt phẳng Oxy.

Nếu h > 0 thì giao tuyến là một đường hypebol có trục thực song song với Oz.

Nếu h < 0 thì giao tuyến là một đường hypebol có trục thực song song với Oy.

Hình chiếu tất cả những hypebol đó trên mặt phẳng Oxy là những hypebol có hai đường tiệm cận chung, đó là giao tuyến của (16) và Oxy.

Nếu cắt mặt (16) bởi mặt phẳng x = h thì giao tuyến có phương trình:

$$\begin{cases} x = h \\ y^2 = -2qz + \dfrac{q}{p}h^2 \end{cases}$$

Đó là một parabol nằm trong mặt phẳng x = h và quay bề lõm xuống dưới, với những giá trị h khác nhau, các parabol đó chỉ khác nhau một phép tịnh tiến.

Tương tự như vậy, nếu cắt mặt (16) bởi mặt phẳng y = h thì giao tuyến cũng là parabol nhưng quay bề lõm lên trên.

***Chú ý*:** Tương tự như paraboloit eliptic, ta cũng đưa ra cách xây dựng mặt paraboloit hypebolic:

Nếu ta ký hiệu $\begin{cases} x = h \\ y^2 = -2qz + \dfrac{q}{p}h^2 \end{cases}$ là parabol P_h thì chúng đều là ảnh của parabol P_0:

$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = -2qz \end{cases}$ qua một phép tịnh tiến. Hơn nữa đỉnh của các parabol đó luơn luôn nằm trên P:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 2pz \end{cases}$$

Như vậy, mặt paraboloit hypebolic có thể xem là một mặt sinh ra bởi parabol P_0 khi nó chuyển động tịnh tiến sao cho đỉnh của nó luôn luôn nằm trên parabol P.

8.Mặt trụ elip

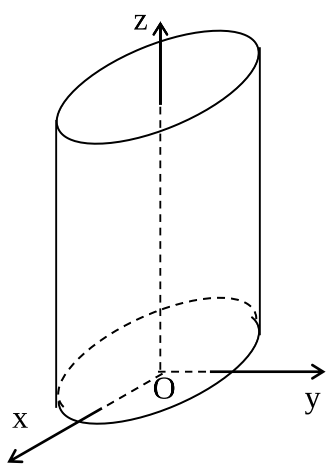
Trong không gian Oxyz cho mặt có phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (17)$$

được gọi là mặt trụ elip.

Đường chuẩn của nó là một đường elip nằm trong mặt phẳng Oxy:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1;\ z = 0,$ còn



đường sinh song song với Oz.

Mặt trụ elip (17) có các trục đối xứng sau đây:

a.Trục Oz. Và trục Oz được gọi là trục cuả mặt trụ.

b.Mọi đường thẳng cắt Oz và song song với Ox hoặc Oy.

Mặt trụ elip (17) có các mặt đối xứng sau đây:

a.Mặt Oxz.

b.Mặt Oyz.

c.Mọi mặt phẳng vuông góc với Oz.

Mặt trụ elip (17) có vô số tâm đối xứng, đó là các điểm nằm trên trục Oz.

Nếu trong mặt trụ elip (17) mà a = b thì ta có mặt trụ tròn xoay.

Cắt mặt trụ(17) bằng một mặt phẳng α song song với trục Oz. Và gọi Δ là giao tuyến cuả mặt phẳng α và mặt phẳng Oxythì rõ rằng là:

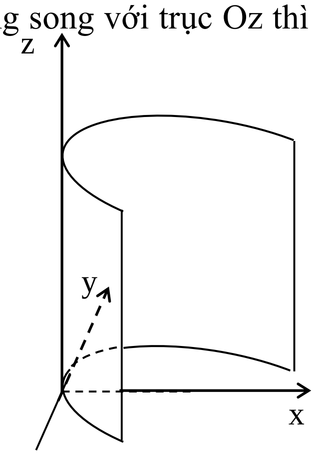
- Mặt phẳng α không cắt mặt trụ elip (17) nếu đường thẳng Δ không cắt đường chuẩn cuả nó.

- Mặt phẳng α cắt mặt trụ elip (17) theo một đường sinh d nếu đường thẳng Δ tiếp xúc với đường chuẩn. Lúc này mặt phẳng α gọi là mặt phẳng tiếp xúc với mặt trụ dọc theo đường sinh đó.

- Mặt phẳng α cắt mặt trụ elip (17) theo hai đường sinh song song d và d' nếu đường thẳng Δ cắt đường chuẩn tại hai điểm.

Nếu cắt mặt trụ(17) bằng một mặt phẳng không song song với trục Oz thì giao tuyến là một đường bậc hai giới nội, tức là một elip nào đó.

9.Mặt trụ parabol



Trong không gian Oxyz cho mặt có phương trình:

$$y^2 = 2px \qquad (18)$$

với p > 0 được gọi là mặt trụ parabol. Đường chuẩn cuả nó là một đường parabol nằm trong mặt phẳng Oxy:

$y^2 = 2px;\ z = 0.$

Hiển nhiên là toàn bộ mặt này nằm về một phía cuả mặt phẳng Oyz.

Mặt trụ (18) nhận các đường thẳng song song với Ox và cắt Oz làm trục đối xứng, nhận mặt phẳng Oxz và các mặt phẳng vuông góc với Oz làm mặt phẳng đối xứng.

Nếu cắt mặt trụ (18) bởi một mặt phẳng song song với Oz thì dễ dàng thấy rằng giao tuyến hoặc là rỗng, hoặc là một đường sinh, hoặc là cặp đường thẳng song song hoặc là một cặp đường sinh trùng nhau.

Nếu cắt mặt trụ (18) bởi một mặt phẳng không song song với Oz thì dễ dàng thấy rằng giao tuyến là một đường bậc hai không giới nội và có một nhánh. Điều đó chứng tỏ giao tuyến là một parabol.

10.Mặt trụ hypebol

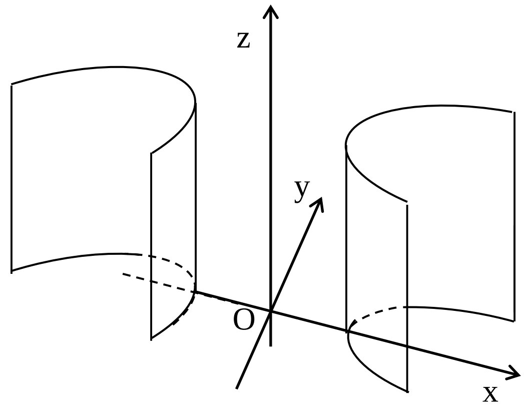
Trong không gian Oxyz cho mặt có phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (19)$$ được gọi là mặt trụ hypebol.

Đường chuẩn cuả nó là một đường hypebol nằm trong mặt phẳng Oxy:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $z = 0$, còn

đường sinh song song với Oz.



Mặt trụ này nhận các trục Oz và các đường thẳng cắt Oz và song song với Ox hoặc Oy làm trục đối xứng, nhận các điểm thuộc Oz làm tâm đối xứng.

Trục Oz gọi là trục cuả mặt trụ hypebol đó.

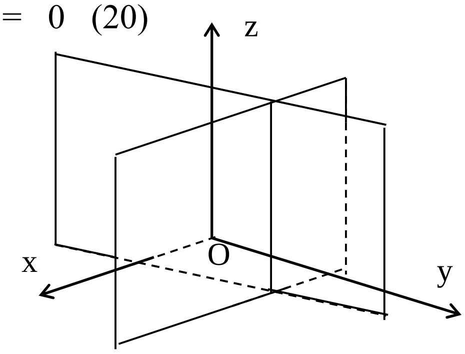
Nếu cắt mặt trụ (19) bởi một mặt phẳng song song với Oz thì dễ dàng thấy rằng giao tuyến: hoặt là rỗng, hoặc là một đường sinh, hoặc là theo hai đường sinh, hoặc là một cặp đường sinh trùng nhau.

Nếu cắt mặt trụ (19) bởi một mặt phẳng không song song với Oz thì dễ dàng thấy rằng giao tuyến là một đường bậc hai không giới nội và có hai nhánh . Điều đó chứng tỏ giao tuyến là một hypebol.

11.Cặp mặt phẳng

Trong không gian Oxyz cho mặt có phương trình:

$$(Ax + By + C)(A'x + B'y + C') = 0 \quad (20)$$



Phương trình (20) xác định cho Ta một mặt trụ mà đường chuẩn của Nó là cặp đường thẳng :

$Ax + By + C = 0$ và

$A'x + B'y + C') = 0$ nằm trong mặt phẳng Oxy.

Như vậy phương trình (20) biểu thị một cặp mặt phẳng song song với Oz và chứa hai đường thẳng nói trên. Cặp mặt phẳng đó có thể cắt nhau, hoặc song song, hoặc trùng nhau.

Tóm lại:

Ta có các loại mặt bậc hai với phương trình chính tắc sau

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Mặt elipxoit.
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Mặt hyperboloit một tầng.

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ Mặt hyperboloit hai tầng.

4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ Mặt elipxoit ảo.

5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ Mặt nón ảo.

6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ Mặt nón elip.

7. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ Mặt parabolloit eliptic

8. $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ Mặt parabolloit heyperbolic (mặt yên ngựa)

9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Mặt trụ elip.

10. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ Mặt trụ heyperbol.

11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ Mặt trụ elip ảo.

12. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ Cặp mặt phẳng ảo cắt nhau.

13. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ Cặp mặt phẳng cắt nhau.

14. $y^2 = 2px$ Mặt trụ parabol.

15. $x^2 - a^2 = 0$ Cặp mặt phẳng song song.

16. $x^2 + a^2 = 0$ Cặp mặt phẳng ảo song song.

17. $x^2 = 0$ Cặp mặt phẳng trùng nhau.

§4 ĐƯỜNG SINH THẲNG CỦA MẶT BẬC HAI

1.Chúng ta đã thấy rằng mặt trụ bậc hai có thể xem như sinh bởi một đường thẳng chuyển động song song với chính nó và tựa trên một đường bậc hai. Tất cả các đường thẳng đó gọi là đường sinh thẳng cuả mặt trụ bậc hai.

Mặt nón bậc hai cũng có những đường sinh thẳng, những đường này luôn đi qua đỉnh cuả mặt nón.

Mặt elip xoit không có đường sinh thẳng, vì nó giới nội nên không thể chứa một đường thẳng nào.

Các mặt parabolloit eliptic $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ (1) và mặt hyperboloit hai tầng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ (2) cũng không chứa đường sinh nào cả.

Thật vậy, mặt phẳng z = h hoặc không cắt, hoặc cắt hai mặt trên theo một đường elip. Suy ra cả hai mặt đó không thể chứa những đường thẳng song song với mặt phẳng Oxy. Xét một đường thẳng d không song song với Oxy, khi đó nếu điểm $M_o(x_o,y_o,z_o)$ nằm trên d thì x_o có thể lấy gía trị thực tuỳ ý. Bởi vậy đường thẳng d không thể nằm trên mặt (1) hoặc (2). Vậy hai mặt đó cũng không chứa những đường thẳng không song song với mặt phẳng Oxy.

2.Đường sinh thẳng cuả mặt hypeboloit một tầng

2.1.Phương trình

Giả sử cho mặt hyperboloit một tầng có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (3)$$

Lấy một điểm $M_o(x_o,y_o,z_o)$ thuộc mặt (3), tức là :

$$\frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} - \frac{{z_0}^2}{c^2} = 1 \qquad (4)$$

Gọi d là đường thẳng qua M_0 và có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \qquad (5)$$

Ta cần xác định véc tơ chỉ phương $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ cuả d sao cho đường thẳng đó hoàn toàn nằm trên mặt (3). Muốn vậy với mọi t ta phải có:

$$\frac{(x_0 + \alpha t)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + \beta t)^2}{b^2} - \frac{(z_0 + \gamma t)^2}{c^2} = 1$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha^2}{a^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2} - \dfrac{\gamma^2}{c^2} = 0 \\ \dfrac{x_o\alpha}{a^2} + \dfrac{y_0\beta}{b^2} - \dfrac{z_0\gamma}{c^2} = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Từ phương trình đầu cuả (6) suy ra γ khác 0(vì nếu không thì $\alpha = \beta = \gamma = 0$), vậy có thể cho $\gamma = c$. Khi đó (6) trở thành:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha^2}{a^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{x_o\alpha}{a^2} + \dfrac{y_0\beta}{b^2} = \dfrac{z_0}{c} \end{cases} \qquad (7)$$

Rút β/b từ phương trình thứ hai cuả (7) rồi thay vào phương trình thứ nhất, sau khi rút gọn ta được:

$$\left(\frac{x_0^{\;2}}{a^2}+\frac{y_0^{\;2}}{b^2}\right)\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2-2\frac{x_0y_0}{ac}\left(\frac{\alpha}{a}\right)+\frac{z_0^{\;2}}{c^2}-\frac{y_0^{\;2}}{b^2}=0$$

Đó là một phương trình bậc hai đối với $\frac{\alpha}{a}$. Giải phương trình này ta được:

$$\frac{\alpha}{a}=\frac{\frac{x_0z_0}{ac}+\frac{y_0}{b}}{\frac{x_0^{\;2}}{a^2}+\frac{y_0^{\;2}}{b^2}},\qquad\qquad \frac{\alpha}{a}=\frac{\frac{x_0z_0}{ac}-\frac{y_0}{b}}{\frac{x_0^{\;2}}{a^2}+\frac{y_0^{\;2}}{b^2}}$$

Vậy ta có hai nghiệm:

$$\alpha_1=a.\frac{\frac{x_0z_0}{ac}+\frac{y_0}{b}}{\frac{x_0^{\;2}}{a^2}+\frac{y_0^{\;2}}{b^2}},\qquad \beta_1=b.\frac{\frac{x_0z_0}{ac}-\frac{y_0}{b}}{\frac{x_0^{\;2}}{a^2}+\frac{y_0^{\;2}}{b^2}},\quad \gamma_1=c\quad (8)$$

$$\alpha_2=a.\frac{\frac{x_0z_0}{ac}-\frac{y_0}{b}}{\frac{x_0^{\;2}}{a^2}+\frac{y_0^{\;2}}{b^2}},\qquad \beta_2=b.\frac{\frac{x_0z_0}{ac}+\frac{y_0}{b}}{\frac{x_0^{\;2}}{a^2}+\frac{y_0^{\;2}}{b^2}},\quad \gamma_2=c\quad (9)$$

Tóm lại ta đã chứng minh được qua mỗi điểm M_0 cuả mặt hypeboloit một tầng luôn có hai đường sinh thẳng cuả nó.

Ta chú ý rằng c khác 0 nân các đường sinh thẳng nói trên đều cắt mặt phẳng Oxy, tức là cắt elip họng cuả mặthypeboloit một tầng(3). Bởi vây điểm M_0 trên d có thể lấy là giap điểm d với elip họng đó, tức là điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)$ thoả mãn điều kiện:

$$\frac{x_0^{\;2}}{a^2}+\frac{y_0^{\;2}}{b^2}=1,\ z_0=0$$

Khi đó các công thức (8) và (9) trở thành:

$$\alpha_1=.\frac{a.y_0}{b},\qquad \beta_1=-.\frac{bx_0}{a},\quad \gamma_1=c\quad (8')$$

$$\alpha_2=.-\frac{a.y_0}{b},\qquad \beta_2=.\frac{bx_0}{a}\quad \gamma_2=c\quad (9)$$

Qua $M_0(x_0,y_0,0)$ có hai đường sinh thẳng có phương trình:

$$\begin{cases} x=x_0+\frac{ay_0}{b}t\\ y=y_0-\frac{bx_0}{a}t\\ z=ct\end{cases}\quad (10)\qquad \text{và}\qquad \begin{cases} x=x_0-\frac{ay_0}{b}t\\ y=y_0+\frac{bx_0}{a}t\\ z=ct\end{cases}\quad (11)$$

Như vậy bất cứ đường sinh nào cuả mặt hypeboloit một tầng (3) đều có phương trình thuộc một trong hai dạng trên.

Tóm lại ta đã chứng minh được:

Qua mỗi điểm cuả mặt hypeboloit một tầng (3) có duy nhất một đường sinh thẳng thuộc họ (10) và một đường sinh thẳng thuộc ho (11).

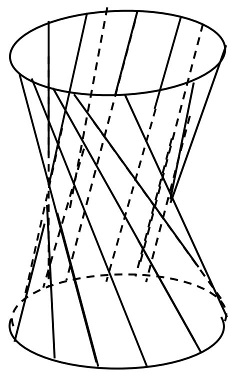
Mặt hypeboloit một tầng có thể tạo nên bởi một đường thẳng khi cho nó thay đổi chiếm tất cả các vị trí của đường sinh thẳng thuộc một trong hai họ nói trên.

2.2.Tính chất

Lấy hai đường sinh thẳng thuộc hai họ khác nhau.

Đường thẳng d_1 thuộc họ thứ nhất đi qua điểm $M_1(x_1,y_1,0)$ có phương trình:

$$\begin{cases} x = x_1 + \dfrac{ay_1}{b}t \\ y = y_1 - \dfrac{bx_1}{a}t \\ z = ct \end{cases}$$



Đường thẳng d_2 thuộc họ thứ đi qua điểm $M_2(x_2,y_2,0)$ có phương trình:

$$\begin{cases} x = x_2 - \dfrac{ay_2}{b}t \\ y = y_2 + \dfrac{bx_2}{a}t \\ z = ct \end{cases}$$

Dễ dàng thấy rằng d_1 và d_2 cùng nằm trong một mặt phẳng. Thật vậy, ta có:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & 0 \\ \dfrac{ay_1}{b} & -\dfrac{bx_1}{a} & c \\ -\dfrac{ay_2}{b} & \dfrac{bx_2}{a} & c \end{vmatrix} = -c[\frac{b}{a}(x_1^2 - x_2^2) + \frac{a}{b}(y_1^2 - y_2^2)] =$$

$$= -abc[(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}) - (\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}) = -abc[1 - 1] = 0.$$

Như vậy d_1 và d_2 sẽ cắt nhau hoặc song song. Chúng chỉ song song khi hai véc tơ chỉ phương là cộng tuyến, tức là :

$\dfrac{ay_1}{b} = -\dfrac{ay_2}{b}$ và $-\dfrac{bx_1}{a} = \dfrac{bx_2}{a}$ hay $y_1 = -y_2$, $x_1 = -x_2$. Điều này có nghiã là M_1 và M_2 đối xứng qua O (tâm cuả elip họng).

Nếu xét hai đường sinh thẳng phân biệt thuộc cùng một họ thì bằng cách tính định thức như trên, ta có chúng chéo nhau.

3.Đường sinh thẳng cuả mặt paraboloit hypebolit

3.1.Phương trình

Giả sử cho mặt paraboloit hyperboloit có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \text{, với } p > 0,\ q > 0 \qquad (12)$$

Giả sử điểm $M_o(x_o,y_o,z_o)$ thuộc mặt (12), tức là : $\frac{x_0^{\ 2}}{p} - \frac{y_0^{\ 2}}{q} = 2z$

Gọi d là đường thẳng qua M_0 và có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$

Ta cần xác định véc tơ chỉ phương $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ cuả d sao cho đường thẳng d là đường sinh thẳng cuả mặt (12) tức là d hoàn toàn nằm trên mặt (12). Muốn vậy với mọi t ta phải có:

$$\frac{(x_0 + \alpha t)^2}{p} - \frac{(y_0 + \beta t)^2}{q} = 2(z_0 + \gamma t)$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha^2}{p} - \dfrac{\beta^2}{q} = 0 \\ \dfrac{x_o\alpha}{p} - \dfrac{y_0\beta}{q} - \gamma = 0 \end{cases}$$

Ta dễ dàng đi đến nghiệm sau đây:

$$\alpha_1 = .\sqrt{p}, \qquad \beta_1 = \sqrt{q}, \quad \gamma_1 = \frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}$$

$$\alpha_2 = .\sqrt{p}, \qquad \beta_2 = -\sqrt{q}, \quad \gamma_2 = \frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}}$$

Như vậy qua $M_o(x_o,y_o,z_o)$ thuộc paraboloit hypebolic (12) có hai đường sinh thẳng:

$$\begin{cases} x = x_0 + \sqrt{p}t \\ y = y_0 + \sqrt{q}t \\ z = z_0 + (\dfrac{x_0}{\sqrt{p}} - \dfrac{y_0}{\sqrt{q}})t \end{cases} \quad (13) \text{ và } \quad \begin{cases} x = x_0 + \sqrt{p}t \\ y = y_0 - \sqrt{q}t \\ z = z_0 + (\dfrac{x_0}{\sqrt{p}} + \dfrac{y_0}{\sqrt{q}})t \end{cases} \quad (14)$$

Họ đường sinh thẳng (13) được gọi là họ đường sinh thẳng thứ nhất, còn họ đường sinh thẳng (14) được gọi là họ đường sinh thẳng thứ hai cuả paraboloit hypebolic (12).

3.2.Tính chất

Dễ dàng chứng minh được hai đường sinh thẳng cuả paraboloit hypebolic (12) thuộc hai họ khác nhau luôn luôn cắt nhau, còn chúng thuộc cùng một họ thì chéo nhau.

BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Lập phương trình mặt trụ có đường chuẩn:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25\\ x+y+2=0\end{cases}$$ và có đường sinh :

a. Song song với trục Ox.

b. Song song với đường thẳng

$$\begin{cases} x = y\\ z = h\end{cases}$$ ở đây h = const

c.Đường sinh vuông góc với mặt phẳng chứa đường chuẩn

2. Lập phương trình mặt trụ ngoại tiếp mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và có đường sinh tạo với ba trục tọa độ ba góc bằng nhau.

3. Lập phương trình mặt nón tại gốc tọa độ O (0, 0, 0) và đường chuẩn là:

$$\begin{cases}x^2+y^2+(z-5)^2 = 9\\ z = 4\end{cases}$$

4. Tìm quỹ tích các đường thẳng biến thiên, luôn đi qua điểm M(3, 0, 5) và tạo với mặt phẳng Oxy một góc 45^0.

5. Lập phương trình chính tắc của Elipxoit

a. Cắt bởi các mặt phẳng tọa độ Oxz, Oyz ta được:

E_1: $\begin{cases}\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{z^2}{16}=1\\ y=0\end{cases}$ E_2: $\begin{cases}\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1\\ x=0\end{cases}$

b. Elipxoit đi qua M(3,1,1) chứa $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\ z = x\end{cases}$

6. Lập phương trình chính tắc của Hyperboloit một tầng biết nó chứa các giao tuyến sau:

a. H_1: $\begin{cases}\dfrac{-x^2}{10}+\dfrac{z^2}{4}=1\\ y=0\end{cases}$ E_1: $\begin{cases}\dfrac{y^2}{7}+\dfrac{z^2}{4}=1\\ x=0\end{cases}$

b. Đi qua M(-4,3,2) và chứa E_1: $\begin{cases}\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1\\ x=0\end{cases}$

7.Lập phương trình chính tắc của Hyperboloit hai tầng biết nó chứa các giao tuyến sau:

a. H_1: $\begin{cases}\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{16}=1\\ x=0\end{cases}$ H_2: $\begin{cases}-\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ z=0\end{cases}$

b. H_1: $\begin{cases}\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{z^2}{4}=1\\ x=0\end{cases}$ E_1: $\begin{cases}\dfrac{x^2}{48}+\dfrac{z^2}{12}=1\\ y=10\end{cases}$

8. Lập phương trình chính tắc của Paraboloit Eliptic biết chứa giao tuyến

(E): $\begin{cases} \dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{28}=1 \\ z=-2 \end{cases}$

9. Lập phương trình chính tắc của Paraboloit Hyperboloic biết nó chứa giao tuyến:

$\begin{cases} x^2 = 40z \\ x = y \end{cases}$ và đi qua M(-2$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$,1).