Mục lục

Chương 1

CHUỖI FOURIER VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

1.1. Chuỗi Fourier

1.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.1. Chuỗi hàm có dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (-\pi \leq x \leq \pi) \tag{1.1}$$

trong đó $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, \ldots$ là các hằng số, được gọi là *chuỗi lượng giác*.

Các hàm số $\sin nx, \cos nx$ cùng với số hạng tổng quát $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ là các hàm tuần hoàn với chu kì $\dfrac{2\pi}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, liên tục và khả vi mọi cấp. Nếu chuỗi (1.1) hội tụ thì tổng của nó là hàm tuần hoàn với chu kì 2π. Vấn đề đặt ra là ta có thể khai triển hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π thành chuỗi lượng giác (1.1) hay không? Và giả sử hàm số $f(x)$, tuần hoàn với chu kỳ 2π, khai triển được thành chuỗi lượng giác (1.1)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (-\pi \leq x \leq \pi) \tag{1.2}$$

thì các hệ số $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, \ldots$ được xác định như thế nào? Các hệ số này có tính được theo $f(x)$ hay không?

Trước hết, bằng cách tính trực tiếp, chúng ta thấy rằng

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m \neq n, \\ \pi & \text{nếu } m = n. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m \neq n, \\ \pi & \text{nếu } m = n. \end{cases}$$

Từ đó, nếu chuỗi lượng giác (1.1) hội tụ đều đến hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$ thì các hệ số được tính bởi công thức sau

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{1.3}$$

Thật vậy, từ (1.2), ta tích phân 2 vế từng số hạng từ $-\pi \to \pi$ thì

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Để tính $a_n, n = 1, 2, \ldots$, ta nhân $\cos nx$ vào 2 vế của (1.2) rồi lấy tích phân từng số hạng từ $-\pi \to \pi$. Khi đó,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \cdot \pi \quad \Longrightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Tương tự, nhân vào 2 vế của (1.2) với $\sin nx$ rồi lấy tích phân từng số hạng từ $-\pi \to \pi$, ta được

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, n = 1, 2, \ldots$$

Trên đây, ta đã giả sử hàm $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Fourier và luôn lấy tích phân được chuỗi ở vế phải theo từng số hạng. Tuy vậy, chúng ta cũng nhận thấy rằng chỉ cần $f(x)$ khả tích trên đoạn $[\pi, \pi]$ thì có thể tính được các hệ số ở (1.3). Vì vậy, ta cũng có chuỗi Fourier tương ứng của hàm $f(x)$.

Định nghĩa 1.2. Cho $f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π. Chuỗi lượng giác (1.1) với các hệ số $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, \ldots$ được tính bởi công thức (1.3) được gọi là *chuỗi Fourier tương ứng của hàm $f(x)$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$*. Các hệ số $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, \ldots$ được gọi là hệ số Fourier của hàm $f(x)$.

Như vậy, mọi hàm $f(x)$ khả tích trên đoạn $[-\pi, \pi]$ đều có chuỗi Fourier tương ứng của nó và ta kí hiệu

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

1.1.2 Điều kiện đủ để chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ hội tụ

Như đã biết, mọi hàm $f(x)$ khả tích trên đoạn $[-\pi, \pi]$ đều có chuỗi Fourier tương ứng. Tuy nhiên, chuỗi Fourier thu được trong trường hợp này có thể không hội tụ và nếu chuỗi hội tụ thì chưa chắc tổng của chuỗi là $f(x)$. Ta có kết quả cơ bản sau đây (không chứng minh).

Định lí 1.1. ***(Tiêu chuẩn Dirichlet)*** *Nếu $f(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kì 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên đoạn $[-\pi, \pi]$ thì chuỗi Fourier của nó hội tụ từng điểm trên đoạn này và tổng của chuỗi bằng $f(x)$ nếu $f(x)$ liên tục tại $x \in (-\pi, \pi)$; bằng $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ nếu $f(x)$ gián đoạn (loại 1) tại $x \in (-\pi, \pi)$ và bằng $\dfrac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2}$ tại $x = \pm\pi$.*

1.1.3 Một số ví dụ

Ví dụ 1.1. Cho $f(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π xác định bởi

$$f(x) = x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

thì chuỗi Fourier tương ứng của $f(x)$ là

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

Thật vậy, theo (1.3), các hệ số của chuỗi là

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot 0 = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nxdx = 0 \quad \text{vì } x\cos nx \text{ là hàm số lẻ},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nxdx \text{ (vì } x\sin nx \text{ là hàm số chẵn)}$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx\Big)$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{n}(-1)^n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Bởi vì hàm số $f(x) = x$ liên tục trên đoạn $[-\pi, \pi]$ nên chuỗi Fourier của nó sẽ hội tụ về x tại mọi điểm, tức là chúng ta có

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx \quad (-\pi \le x \le \pi).$$

Ví dụ 1.2. Cho hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π là

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \le x \le \pi)$$

ta có chuỗi Fourier tương ứng của $f(x)$ là

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \quad (-\pi \le x \le \pi).$$

Trước hết, chúng ta thấy rằng hàm số $f(x) = x^2$ liên tục tại mọi điểm thuộc đoạn $[-\pi, \pi]$ nên chuỗi Fourier của $f(x)$ hội tụ về chính nó. Áp dụng các công thức tính hệ số ở (1.3), ta được

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nxdx,$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\Big]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\Big[\frac{2x}{n^2}\cos nx\Big]_0^{\pi} = (-1)^n\frac{4}{n^2}, n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx = 0(\text{ vì } x^2\sin nx \text{ là hàm số lẻ}).$$

Ví dụ 1.3. Cho hàm tuần hoàn với chu kì 2π xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{nếu } -\pi < x \le 0, \\ x & \text{nếu } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Để ý rằng, hàm số cho trong trường hợp này không xác định tại $x = \pm\pi$ và nó không liên tục tại $x = 0$. Chúng ta sẽ đi xác định các hệ số của chuỗi Fourier tương ứng của $f(x)$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0}\pi dx + \int_0^{\pi} x dx\Big) = \frac{1}{\pi}\Big(\pi x\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}\Big) = \frac{3\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0}\pi\cos nx dx + \int_0^{\pi} x\cos nx dx\Big)$$

$$=\frac{1}{\pi}\Big(\frac{\pi}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \Big[\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big]_0^{\pi}\Big)$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\Big(\cos n\pi - 1\Big) = \frac{1}{n^2\pi}\Big[(-1)^n - 1\Big], n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0}\pi\sin nx dx + \int_0^{\pi} x\sin nx dx\Big)$$

$$=\frac{1}{\pi}\Big(-\frac{\pi}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} + \Big[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big]_0^{\pi}\Big)$$

$$=\frac{1}{n}\Big(-1 + \cos(-n\pi)\Big) - \frac{1}{n}\cos n\pi = -\frac{1}{n}, n = 1, 2, \ldots$$

Vậy, chuỗi Fourier tương ứng của hàm $f(x)$ đã cho là

$$f(x) \sim \frac{3\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{n^2\pi}\Big(1 - (-1)^n\Big)\cos nx + \frac{1}{n}\sin nx\Big] \ (-\pi < x < \pi).$$

Chuỗi Fourier thu được hội tụ về π với $x \in (-\pi, 0)$ và hội tụ về x với $x \in (0, \pi)$. Tại $x = 0$ thì chuỗi hội tụ về giá trị $\frac{\pi}{2}$.

Chú ý 1.1. (i) Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ trên đoạn $[-\pi, \pi]$ thì chuỗi Fourier tương ứng là chuỗi sin vì ta luôn có các hệ số $a_0 = a_n = 0, n = 1, 2, \ldots$ Đồng thời,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, n = 1, 2, \ldots$$

(ii) Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn trên đoạn $[-\pi, \pi]$ thì ta luôn có các hệ số $b_n = 0, n = 1, 2, \ldots$ Do đó, chuỗi Fourier tương ứng là chuỗi cosin. Ngoài ra,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, n = 0, 1, 2, \ldots$$

1.1.4 Khai triển Fourier trên đoạn $[0, \pi]$

Để tìm khai triển Fourier của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0, \pi]$, ta có thể thác triển $f(x)$ thành hàm $F(x)$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$ sao cho trên đoạn $[0, \pi]$ thì $F(x) \equiv f(x)$. Sau đó, tìm khai triển Fourier của hàm số $F(x)$ trên $[-\pi, \pi]$. Khi đó, khai triển Fourier của hàm sô $f(x)$ trên đoạn $[0, \pi]$ chính là khai triển Fourier của hàm $F(x)$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$. Thông thường, chúng ta thác triển theo hai cách

(i) Thác triển $f(x)$ thành hàm số chẵn $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in [0, \pi], \\ f(-x) & \text{nếu } x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

(ii) Thác triển $f(x)$ thành hàm số lẻ $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in [0, \pi], \\ -f(-x) & \text{nếu } x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Ví dụ 1.4. Cho hàm số $f(x) = \pi - x, 0 \leq x \leq \pi$. Hãy tìm chuỗi Fourier của hàm số này theo các hàm $\sin nx$ (chuỗi sin).

Để nhận được khai triển Fourier theo chuỗi sin, chúng ta cần thác triển $f(x)$ thành hàm lẻ $F(x)$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$ như sau

$$F(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{nếu } 0 \leq x \leq \pi, \\ -\pi - x & \text{nếu } -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

Khi đó, ta có thể khai triển hàm số $F(x)$ thành chuỗi sin với

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\sin nx dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx dx = \frac{2}{n}.$$

Do đó

$$F(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx \quad \text{với } -\pi \le x \le \pi \ (x \ne 0).$$

Vậy

$$\pi - x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx \quad \text{với } 0 < x \le \pi.$$

Ví dụ 1.5. Cho $f(x) = x. 0 \le x \le \pi$. Hãy tìm chuỗi cosin của hàm này.

Ta thác triển $f(x)$ thành hàm số chẵn $F(x)$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } 0 \le x \le \pi, \\ -x & \text{nếu } -\pi \le x < 0. \end{cases}$$

Khi đó, ta có thể khai triển $F(x)$ thành chuỗi cosin với các hệ số được xác định như sau:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi}\Big[(-1)^n - 1\Big]$$
$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi} & \text{nếu } n \text{ lẻ}, \\ 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn}. \end{cases}$$

Như vậy,

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x \quad \text{với } -\pi \le x \le \pi.$$

Suy ra

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x \quad \text{với } 0 \le x \le \pi.$$

1.1.5 Khai triển Fourier hàm có chu kì $2l$

Cho hàm số $f(x)$ có chu kì $2l, l > 0$. Giả sử chúng ta cần tìm chuỗi Fourier tương ứng của $F(x)$ trên đoạn $[-l, l]$. Ta sẽ dùng phép biến đổi $t = \frac{\pi x}{l}$ và xét hàm số $F(t) = f(x) = f(\frac{tl}{\pi})$.

Ta có

$$F(t + 2\pi) = f\big(\frac{l}{\pi}(t + 2\pi)\big) = f(\frac{lt}{\pi} + 2l) = f(\frac{lt}{\pi}) = F(t)$$

hay $F(t)$ là hàm tuần hoàn với chu kì 2π. Vậy, khai triển Fourier của hàm $F(x)$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$ là

$$F(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (-\pi \le t \le \pi).$$

với các hệ số được cho bởi

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)dt = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos nt dt = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin nt dt = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{1.4}$$

Từ đó, ta được khai triển Fourier của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-l, l]$ là

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}) \quad (-l \le x \le l)$$

với các hệ số được tính bởi (1.4).

Ví dụ 1.6. Tìm khai triển Fourier của hàm số $f(x) = x^2$ trên đoạn $[-1, 1]$.

Vì hàm số đã cho là hàm số chẵn nên $b_n = 0, n = 1, 2, \dots$

Ta có

$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$,

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x dx = 2\int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx = (-1)^n \frac{4}{n^2\pi^2}.$$

Vậy khai triển Fourier cần tìm là

$$x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

Ví dụ 1.7. Tìm khai triển Fourier của hàm số $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$ trên $[0, 2]$.

Trước hết, chúng ta cần thác triển $f(x)$ thành hàm $F(x)$ trên đoạn $[-2, 2]$ sao cho trên $[0, 2]$ thì $F(x) = f(x)$. Có nhiều cách, chẳng hạn, ở đây ta chọn thác triển chẵn (người đọc hãy thử chọn cách thác triển lẻ), tức là

$$F(x) = \begin{cases} x - \dfrac{x^2}{2} & \text{nếu } 0 \leq x \leq 2, \\ -x - \dfrac{x^2}{2} & \text{nếu } -2 \leq x < 0. \end{cases}$$

Khi đó, hệ số $b_n = 0, n = 1, 2, \ldots$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_{-2}^{2} F(x)dx = 2\int_0^2 (x - \frac{x^2}{2})dx = \frac{2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_{-2}^{2} F(x)\cos n\pi x dx = 2\int_0^2 (x - \frac{x^2}{2})\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi^2}\Big[1 + (-1)^n\Big] = \begin{cases} -\dfrac{8}{n^2\pi^2} & \text{nếu } n \text{ chẵn}, \\ 0 & \text{nếu } n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

Vì vậy, chúng ta có

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos n\pi x.$$

Chú ý 1.2. Trong một số trường hợp, nếu hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện của tiêu chuẩn Dirichlet thì chuỗi Fourier của nó sẽ hội tụ đều về $f(x)$ trên đoạn $[-l, l]$. Khi đó, chúng ta có thể lấy đạo hàm hoặc nguyên hàm từng số hạng của chuỗi Fourier của $f(x)$ để suy ra khai triển Fourier của một hàm số mới nào đó.

1.1.6 Áp dụng khai triển Fourier tìm tổng của chuỗi số

Ví dụ 1.8. Cho f là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π và $f(x) = x^2$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$. Hãy viết khai triển Fourier của f và tính tổng của các chuỗi số sau

$$a) \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} \quad ; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad ; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

Tương tự như ở ví dụ 1.2. ta có

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

a) Với $x = 0$, ta có

$$0 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

b) Với $x = \pi$ thì

$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

c) Vì hai chuỗi số ở câu a) và câu b) hội tụ theo từng số hạng nên ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

hay

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[1 - (-1)^n\right]\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

tức là

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Vì vậy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{4}.$$

1.2. Phép biến đổi Laplace

1.2.1 Hàm gốc

Định nghĩa 1.3. Hàm số thực $f(t)$ được gọi là *hàm gốc* nếu nó thỏa mãn ba điều kiện sau

(i) $f(t)$ chỉ có hữu hạn điểm gián đoạn loại 1 trên $[a,b]\subset[0,+\infty)$.

(ii) Hàm $f(t)$ tăng không nhanh hơn hàm mũ, tức là

$$\exists M>0, s_0\geq 0 : |f(t)|\leq Me^{s_0t}, t\geq t_0,$$

s_0 được gọi là chỉ số tăng của hàm $f(t)$.

(iii) $f(t)=0, \forall t<0$.

Ví dụ 1.9. Hàm đơn vị

$$\mu(t)=\begin{cases}1 & \text{khi } t\geq 0.\\ 0 & \text{khi } t<0.\end{cases} \tag{1.5}$$

là hàm gốc. Thật vậy, điều kiện (i), (iii) đã thỏa, ta chỉ cần kiểm tra điều kiện (ii). Ta có

$$|\mu(t)|\leq 1$$

nên ta chọn $M=1, s_0=0$ thì điều kiện (ii) được thỏa.

Nếu hàm số $\varphi(t)$ là hàm thỏa các điều kiện (i), (ii) nhưng chưa thỏa điều kiện (iii) thì

$$\mu(t)\varphi(t)=\begin{cases}\varphi(t) & \text{khi } t\geq 0,\\ 0 & \text{khi } t<0.\end{cases}$$

(với $\mu(t)$ là hàm đơn vị (1.5)) là hàm gốc. Ta qui ước rằng, khi đó, ta vẫn kí hiệu hàm $\mu(t)\varphi(t)$ là $\varphi(t)$.

Ví dụ 1.10. Các hàm gốc $\mu(t)^{at}$. $\mu(t)t$. $\mu(t)t^2$. $\mu(t)\cos at$. $\mu(t)\sin at, \ldots$ được kí hiệu là e^{at}, t, t^2, $\cos at$. $\sin at \ldots$.

Định lí 1.2. ***(Định lí cơ bản)*** *Nếu $f(t)$ là một hàm gốc có chỉ số tăng là s_0 thì tích phân suy rộng*

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \quad (p \text{ là tham số phức})$$

a) Hội tụ tuyệt đối trong miền $Rep = s > s_0$.

b) Là một hàm của biến phức p : $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$, giải tích trong miền $Rep > s_0$ và $F(p) \to 0$ khi $p \to \infty$ sao cho $Rep = s \to +\infty$.

1.2.2 Phép biến đổi Laplace

Định nghĩa 1.4. Cho $f(t)$ là hàm gốc với chỉ số tăng s_0. Hàm

$$F(p) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

giải tích trong nửa mặt phẳng $Rep > s_0$. gọi là *phép biến đổi* (hay toán tử) *Laplace* của hàm $f(t)$.

Khi đó, ta gọi hàm $F(p)$ là *ảnh* (hay *ảnh Laplace*) của hàm gốc $f(t)$ qua phép biến đổi Laplace của $f(t)$, kí hiệu

$$F(p) = L(f(t)),$$

hay

$$F(p) \fallingdotseq f(t) \quad : \text{quan hệ ảnh - gốc,}$$

$$f(t) \risingdotseq F(p) \quad : \text{quan hệ gốc - ảnh.}$$

Ta cũng nói $f(t)$ là phép *biến đổi Laplace ngược* của $F(p)$, kí hiệu là

$$f(t) = L^{-1}(F(p))$$

Ví dụ 1.11. Ảnh của hàm đơn vị $\mu(t)$ qua phép biến đổi Laplace là $F(p) = \dfrac{1}{p}$.

Thật vậy, theo định nghĩa

$$L(\mu(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = -\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p} \quad , \text{ khi } Rep > 0.$$

Ví dụ 1.12. Ảnh của hàm $f(t) = e^{at}$ qua phép biến đổi Laplace là $F(p) = \frac{1}{p-a}$. Thật vậy,

$$L(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t}dt = \frac{e^{(a-p)t}}{a-p}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{a-p} \quad \text{, khi } Rep > Rea.$$

Sau này, chúng ta chỉ quan tâm đến sự tồn tại của ảnh trong một miền nào đó mà ít quan tâm đến miền đó. Do vậy, thường ta sẽ không chỉ rõ miền có ý nghĩa của công thức. Chẳng hạn, ta viết

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p} \quad \text{hay} \quad \frac{1}{p} \fallingdotseq 1,$$

$$e^{at} \risingdotseq \frac{1}{p-a} \quad \text{hay} \quad \frac{1}{p-a} \fallingdotseq e^{at}.$$

1.2.3 Tính chất cơ bản của phép biến đổi Laplace

Tính chất tuyến tính

Cho hai hàm gốc $f(t)$, $g(t)$ lần lượt có ảnh là $F(p)$, $G(p)$. Chúng ta có thể dễ dàng chứng minh theo định nghĩa rằng

$$f(t) + g(t) \risingdotseq F(p) + G(p),$$
$$kf(t) \risingdotseq kF(p) \quad , \forall k \in \mathbb{C}.$$

Chúng ta có thể mở rộng tính chất tuyến tính cho hữu hạn hàm

$$k_1f_1(t) + k_2f_2(t) + \ldots + k_nf_n(t) \risingdotseq k_1F_1(p) + k_2F_2(p) + \ldots + k_nF_n(p)$$

Ví dụ 1.13. Dựa vào công thức ảnh của hàm gốc $e^{at} \risingdotseq \frac{1}{p-a}$ ta có thể tìm được ảnh của hàm gốc $\sin at$, $\cos at$, $\operatorname{ch} at$, $\operatorname{sh} at$ thông qua tính chất tuyến tính của phép biến đổi Laplace. Thật vậy,

Ta có $\sin at = \dfrac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} = \dfrac{1}{2i}e^{iat} - \dfrac{1}{2i}e^{-iat}$.

mà $e^{iat} \risingdotseq \dfrac{1}{p - ia}$; $e^{-iat} \risingdotseq \dfrac{1}{p + ia}$.

nên $\sin at \risingdotseq \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{p - ia} - \dfrac{1}{p + ia}\right) = \dfrac{a}{p^2 + a^2}$.

Vậy

$$\sin at \risingdotseq \frac{a}{p^2 + a^2}.$$

Tương tự, chúng ta cũng tính được

$$\cos at \risingdotseq \frac{p}{p^2 + a^2},$$

$$\operatorname{sh} at \risingdotseq \frac{a}{p^2 - a^2},$$

$$\operatorname{ch} at \risingdotseq \frac{p}{p^2 - a^2}.$$

Tính chất đồng dạng

Nếu $f(t) \risingdotseq F(p)$ thì với mọi số $\lambda > 0$, ta có

$$f(\lambda t) \risingdotseq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Ví dụ 1.14. Biết $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2 + 1}$ thì với mọi $\omega > 0$ chúng ta có

$$\sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Tính chất tịnh tiến ảnh

Nếu a là một số phức bất kì và $f(t) \risingdotseq F(p)$ thì

$$e^{at} f(t) \risingdotseq F(p - a)$$

Ví dụ 1.15. Vì $\sin \omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ nên

$$e^{at} \sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p - a)^2 + \omega^2}.$$

Tương tự

$$e^{at}\cos\omega t \risingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}.$$

$$e^{at}\operatorname{sh}\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}.$$

$$e^{at}\operatorname{ch}\omega t \risingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}.$$

Đạo hàm gốc

Giả sử $f(t)$ là hàm gốc, có đạo hàm $f'(t)$ cũng là hàm gốc. Nếu $f(t) \risingdotseq F(p)$ thì

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),$$
$$f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$
$$\dots$$
$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Hệ quả 1.1. Từ tính chất trên, ta suy ra:

a) Nếu $f'(t)$ là hàm gốc và $pF(p)$ giải tích tại thì $\lim\limits_{p\to\infty} pF(p) = f(0)$.

b) Nếu $f'(t)$ là hàm gốc và tồn tại giới hạn $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ thì ta có

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$$

Tích phân gốc

Cho $f(t)$ là hàm gốc và $f(t) \risingdotseq F(p)$ thì

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}F(p)$$

Nhận xét 1.1. Thông qua công thức đạo hàm gốc và tích phân gốc, chúng ta thấy rằng các phép tính đạo hàm và tích phân đối với hàm gốc được chuyển thành phép tính đại số thông thường đối với ảnh tương ứng. Do vậy, phép biến đổi Laplace có nhiều ứng dụng, nhất là trong việc giải phương trình vi phân.

Đạo hàm ảnh (Định lí nhân)

Cho hàm gốc $f(t)$ và $f(t) \risingdotseq F(p)$ thì

$$(-t)f(t) \risingdotseq F'(p) \quad \text{hay} \quad tf(t) \risingdotseq (-1)F'(p).$$
$$(-t)^2 f(t) \risingdotseq F''(p) \quad \text{hay} \quad t^2 f(t) \risingdotseq (-1)^2 F''(p).$$
$$\ldots$$
$$(-t)^n f(t) \risingdotseq F^{(n)}(p) \quad \text{hay} \quad t^n f(t) \risingdotseq (-1)^n F^{(n)}(p).$$

Ví dụ 1.16. Ta biết $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$ nên

$$-t \risingdotseq -\frac{1}{p^2} \quad \text{hay} \quad t \risingdotseq \frac{1}{p^2}.$$
$$(-t)^2 \risingdotseq \frac{2}{p^3} \quad \text{hay} \quad t^2 \risingdotseq \frac{2}{p^3}.$$

Tổng quát $$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Tích phân ảnh (Định lí chia)

Giả sử $f(t) \risingdotseq F(p)$. Nếu tích phân $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(p)dp$ hội tụ thì

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{+\infty} F(s)ds$$

Ví dụ 1.17. Tìm ảnh của hàm $\dfrac{e^{bt} - e^{at}}{t}$

Vì $f(t) = e^{bt} - e^{at} \risingdotseq \dfrac{1}{p-b} - \dfrac{1}{p-a}$ nên theo công thức tích phân ảnh, ta có

$$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t} = \frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{+\infty} F(s)ds = \int_p^{+\infty} \left(\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s-a}\right)ds$$
$$= \ln \frac{s-b}{s-a}\Big|_p^{+\infty} = \ln \frac{p-a}{p-b}.$$

Vậy

$$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t} \risingdotseq \ln \frac{p-a}{p-b}$$

Tính chất trễ muộn

Giả sử $f(t) \risingdotseq F(p)$ thì với hằng số dương a bất kỳ, ta có

$$e^{-ap}F(p) \fallingdotseq \mu(t-a)f(t-a)$$

trong đó, $\mu(t-a)$ là hàm đơn vị

$$\mu(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t \geq a \\ 0 & \text{nếu } t < a \end{cases}$$

Ví dụ 1.18. Tìm ảnh của hàm $f(t) = \mu(t-3)(t-3)^2$

Vì $t^2 \risingdotseq \dfrac{2}{p^3}$ nên theo tính chất trên, ta có $f(t) \risingdotseq e^{-3t}\dfrac{2}{p^3}$.

Vậy

$$\mu(t-3)(t-3)^2 \risingdotseq \frac{2}{p^3}e^{-3t}$$

Tích chập

Cho hai hàm gốc $f(t)$ và $g(t)$, ta định nghĩa *tích chập* của f và g là

$$f * g(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds$$

Giả sử $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$. Khi đó,

$$f * g(t) \risingdotseq F(p)G(p) \quad \text{và} \quad F(p)G(p) \fallingdotseq f * g(t)$$

Ví dụ 1.19. Tìm gốc của hàm $\dfrac{1}{p^2(p+1)^2}$

Vì $\dfrac{1}{p^2} \fallingdotseq t$ và $\dfrac{1}{(p+1)^2} \fallingdotseq te^{-t}$ nên theo công thức tích chập đối với hàm $f(t) = te^{-t}$ và $g(t) = t$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^2(p+1)^2} &\fallingdotseq \int_0^t f(s)g(t-s)ds = \int_0^t se^{-s}(t-s)ds \\ &= \int_0^t (ts - s^2)e^{-s}ds \\ &= \Big[(-ts + s^2 - t + 2s + 2)e^{-s}\Big]_{s=0}^{s=t} = (t+2)e^{-t} + t - 2\end{aligned}$$

Vậy

$$\frac{1}{p^2(p+1)^2} \fallingdotseq (t+2)e^{-t} + t - 2$$

1.2.4 Phép biến đổi Laplace ngược

Ta đã biết, khi cho hàm gốc $f(t)$ thì ta có thể tìm hàm ảnh bởi công thức

$$L(f(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

Bây giờ, cho hàm ảnh $F(p)$ ta tìm hàm gốc $f(t) = L^{-1}(F(p))$ như thế nào? Chúng ta thừa nhận các định lí sau

Định lí 1.3. *Nếu $f(t)$ là một hàm gốc có chỉ số tăng là s_0 và $F(p)$ là hàm ảnh của $f(t)$ thì tại mọi điểm liên tục của hàm $f(t)$, ta có*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)dp \tag{1.6}$$

trong đó, a là một số thực bất kì, $a > s_0$. Công thức (1.6) gọi là công thức Mellin.

Theo định lí trên, nếu $F(p)$ là hàm ảnh của $f(t)$ thì hàm gốc $f(t)$ được biểu diễn qua hàm ảnh $F(p)$ bởi công thức (1.6). Như vậy, nếu cho trước hàm $F(p)$ và biết rằng $F(p)$ có nghịch ảnh thì nghịch ảnh của nó được xác định bởi công thức (1.6). Vấn đề đặt ra là khi cho trước một hàm $F(p)$ thì với điều kiện nào nó sẽ là hàm ảnh của một hàm gốc? Định lí sau cho ta điều kiện đủ để $F(p)$ là một hàm ảnh

Định lí 1.4. *Giả sử $F(p)$ là một hàm biến phức thỏa mãn các điều kiện sau*

(i) $F(p)$ giải tích trong nửa mặt phẳng $Rep > s_0$.

(ii) Trong nửa mặt phẳng $Rep \geq a > s_0$, hàm $F(p) \to 0$ khi $|p| \to \infty$ đều với $argp$.

(iii) Tích phân

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)dp$$

hội tụ tuyệt đối.

Khi đó, hàm $F(p)$ là ảnh của hàm gốc $f(t)$ được xác định bởi công thức (1.6) với $a > s_0, t > 0$.

Tích phân ở vế phải của (1.6) có thể tính được nhờ áp dụng lý thuyết thặng dư của hàm phức.

Định lí 1.5. *(Công thức tìm hàm gốc của một phân thức thực sự)*

Giả sử $F(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$ *là một phân thức thực sự và* $a_k(k = \overline{1,n})$ *là các cực điểm của hàm* $F(p)$ *thì* $F(p)$ *là ảnh của hàm gốc* $f(t)$ *(thực chất là hàm* $\mu(t)f(t)$*) với*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \underset{p=a_k}{Res}[e^{pt}F(p)]$$

Chú ý 1.3. Nếu $p = a_k$ là cực điểm cấp m của hàm $F(p)$ thì ta đã biết

$$\underset{p=a_k}{Res}[e^{pt}F(p)] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{p_k}\frac{d}{dp^{m-1}}\left[(z - a_k^m)e^{pt}F(p)\right]$$

Ví dụ 1.20. Tìm gốc của ảnh $F(p) = \dfrac{p^2}{(p-1)^3}$

Ta có $p = 1$ là cực điểm cấp 3 của $F(p)$ nên

$$\underset{p=1}{Res}\left[\frac{p^2e^{pt}}{(p-1)^3}\right] = \frac{1}{2}\lim_{p\to1}\frac{d^2}{dp}(p^2e^{pt}) = \frac{1}{2}\lim_{p\to1}\left(2 + 4pt + p^2t^2\right)e^{pt}$$

$$= \frac{1}{2}(2 + 4t + t^2)e^t.$$

Vậy, $$\frac{p^2}{(p-1)^3} \risingdotseq \frac{1}{2}(2 + 4t + t^2)e^t.$$

Thông thường, đối với một số hàm $F(p)$ đơn giản, chúng ta có thể áp dụng các tính chất nêu ở Mục 1.3.3 cũng như mối quan hệ gốc - ảnh. Chẳng hạn, xét các ví dụ sau

Ví dụ 1.21. Cho các hàm ảnh, tìm các hàm gốc

a) $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)(p+2)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p+2}\right) \risingdotseq \dfrac{1}{3}(e^t - e^{-2t})$.

b) $F(p) = \dfrac{1}{(p+a)^2} \risingdotseq te^{-at}$; $\dfrac{1}{(p-a)^2} \risingdotseq te^{at}$.

c) $F(p) = \dfrac{1}{(p+a)^2(p+b)} = \dfrac{A}{p+a} + \dfrac{B}{(p+a)^2} + \dfrac{C}{p+b}$

$\risingdotseq Ae^{-at} + Bte^{-at} + Ce^{-bt}$.

trong đó $A = \dfrac{b}{(a-b)^2}$; $B = \dfrac{a}{a-b}$; $C = -\dfrac{b}{(a-b)^2}$.

d) $F(p) = \dfrac{1}{p(p+a)(p+b)} = \dfrac{1}{ab}\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{a(a-b)}\dfrac{1}{p+a} + \dfrac{1}{b(b-a)}\dfrac{1}{p+b}$

$$\risingdotseq \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)}e^{-at} + \frac{1}{b(b-a)}e^{-bt}.$$

e) $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)} = \dfrac{1}{b^2-a^2}\left(\dfrac{1}{p^2+a^2} - \dfrac{1}{p^2+b^2}\right)$

$$\risingdotseq \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\sin at - \frac{1}{b}\sin bt\right).$$

f) $F(p) = \dfrac{1}{p^2+p+1} = \dfrac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \risingdotseq \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t.$

1.2.5 Ứng dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

Phương pháp chung: từ phương trình vi phân đã cho, lập phương trình ảnh (là phương trình đại số theo ảnh $Y(p) \risingdotseq y(t)$). Giải phương trình ảnh, tìm nghiệm $Y(p)$ rồi dùng phép biến đổi ngược, ta sẽ tìm được gốc $y(t)$ cần tìm.

Ví dụ 1.22. Giải phương trình $y'' + y = t$ với điều kiện ban đầu $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Đặt $Y(p) \risingdotseq y(t)$. Khi đó,

$$y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p + 2$$

Thực hiện phép biến đổi Laplace của hai vế phương trình đã cho, ta được phương trình ảnh tương ứng là

$$p^2Y(p) - p + 2 + Y(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (p^2+1)Y(p) = \frac{1}{p^2} + p - 2$$

$$\Longleftrightarrow \quad Y(p) = \frac{1}{p^2(1+p^2)} + \frac{p}{1+p^2} - \frac{2}{1+p^2}$$

hay

$$Y(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{p}{1+p^2} - \frac{3}{1+p^2}.$$

Vậy $y(t) = t + \cos t - 3\sin t$.

Ví dụ 1.23. Giải phương trình $y'' - 2y' + 2y = 2e^t \cos t$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0) = y'(0) = 0$.

Đặt $Y(p) \risingdotseq y(t)$. Khi đó,

$$y'(t) \risingdotseq pY(p) - y'(0) = pY(p)$$
$$y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p)$$

Lại có $$2e^t \cos t \risingdotseq 2\frac{p-1}{(p-1)^2+1} = \frac{2(p-1)}{p^2-2p+2}$$

Lấy biến đổi Laplace của hai vế phương trình đã cho, ta được phương trình ảnh tương ứng là

$$p^2Y(p) - 2pY(p) + 2Y(p) = \frac{2(p-1)}{p^2-2p+2}$$

hay $$(p^2-2p+2)Y(p) = \frac{2(p-1)}{p^2-2p+2}$$

Như vậy $$Y(p) = \frac{2(p-1)}{(p^2-2p+2)^2} = \frac{2(p-1)}{\left[(p-1)^2+1\right]^2}$$

Ta biết $$t\sin t \risingdotseq -\frac{d}{dp}\left[\frac{1}{(p^2+1)}\right] = \frac{2p}{(p^2+1)^2}$$

Từ đó, suy ra $\dfrac{2(p-1)}{\left[(p-1)^2+1\right]^2} \risingdotseq e^t t \sin t$.

Vậy, nghiệm của phương trình đã cho là $y(t) = te^t \sin t$.

Ví dụ 1.24. Giải phương trình $ty'' + y' + ty = 0$.

Đặt $Y(p) \risingdotseq y(t)$. Khi đó,

$$y'(t) \risingdotseq pY(p) - y'(0)$$
$$y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - py(0) - y'(0)$$

Thực hiện phép biến đổi Laplace của hai vế phương trình đã cho, ta được phương trình ảnh tương ứng là

$$-(1+p^2)Y'(p) - pY(p) = 0$$

hay $$Y'(p) + \frac{p}{p^2+1}Y(p) = 0.$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một thuần nhất, có nghiệm là

$$Y(p) = ce^{-\int \frac{p}{p^2+1}} = ce^{-\frac{1}{2}\ln(p^2+1)} = \frac{c}{\sqrt{p^2+1}}$$

Mặt khác, theo hệ quả của đạo hàm gốc thì $\lim_{p\to+\infty} pY(p) = y(0)$.

Mà $\lim_{p\to+\infty} pY(p) = \lim_{p\to+\infty} \dfrac{pc}{\sqrt{p^2+1}} = c$ nên $c = y(0)$.

Vậy $\quad Y(p) = \dfrac{y(0)}{\sqrt{p^2+1}}$

Vì $\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}} \risingdotseq J_0(t)$ nên suy ra

$$y(t) = y(0)\cdot J_0(t) \quad (J_0(t) \text{ là hàm Bessel bậc } 0)$$

1.3. BÀI TẬP

1.3.1 Chuỗi Fourier

Bài 1. Tìm khai triển Fourier của các hàm số sau trên $(-\pi, \pi)$

a) $f(x) = \begin{cases} 3\pi + 2x & \text{nếu} \quad -\pi < x < 0, \\ \pi + 2x & \text{nếu} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$

Ds: $\quad f(x) \sim 2\pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{l}{n}\sin 2nx.$

b) $f(x) = \sin^2 x$. Ds: $\quad f(x) \sim \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x.$

c) $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$. Ds: $\quad f(x) \sim \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)}\cos nx.$

d) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}x & \text{nếu} \quad -\pi < x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}x & \text{nếu} \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$ Ds: $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\sin nx.$

Bài 2. Tìm khai triển Fourier của các hàm số sau trên khoảng đã chỉ ra:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad -l < x < 0, \\ l - x & \text{nếu} \quad 0 < x < l \end{cases}$ trên khoảng $(-l, l)$.

Ds: $\quad f(x) \sim \dfrac{l}{4} + \dfrac{l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{l}{n^2}\Big[\big(1-(-1)^n\big)\cos\dfrac{n\pi x}{l} + n\pi\sin\dfrac{n\pi x}{l}\Big].$

b) $f(x) = x^3$ trên khoảng $(-c, c)$.

Đs: $$f(x) \sim \frac{2c^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2\pi^2 - 6}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{c}.$$

c) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{nếu} \quad -2 < x < 0, \\ 1 & \text{nếu} \quad 0 \le x < 2 \end{cases}$ trên khoảng $(-2, 2)$.

Đs: $$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n^2} \Big[\big(1 - (-1)^n\big) \cos \frac{n\pi x}{2} + (-1)^{n+1} n\pi \sin \frac{n\pi x}{2} \Big].$$

d) $f(x) = \begin{cases} x(1+x) & \text{nếu} \quad -1 < x < 0, \\ (1-x)^2 & \text{nếu} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$ trên khoảng $(-l, l)$.

Đs: $$f(x) \sim \frac{1}{12} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Big[\big(3 + (-1)^n\big) \cos n\pi x + n\pi \sin n\pi x \Big].$$

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \pi - x$

a) Tìm khai triển Fourier của $f(x)$ trên khoảng $(-\pi, \pi)$.

b) Tìm chuỗi cosin của $f(x)$ trên đoạn $[0, \pi]$.

c) Tìm chuỗi sin của $f(x)$ trên nửa khoảng $(0, \pi]$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \text{nếu} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

Hãy tìm chuỗi cosin của hàm số này trên miền xác định của nó.

Đs: $$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos 2(2n-1)x.$$

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = x^3$.

a) Hãy tìm chuỗi cosin của $f(x)$ trên đoạn $[0, \pi]$.

Đs: $$f(x) = \frac{\pi^3}{4} + 6\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx + \frac{24}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \cos(2n-1)x.$$

b) Sử dụng chuỗi thu được ở câu a), tính tổng của các chuỗi số:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$. Đs: $\dfrac{\pi^4}{96}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. Đs: $\dfrac{\pi^4}{90}$.

1.3.2 Phép biến đổi Laplace

Bài 6. Dùng định nghĩa, tìm ảnh của các hàm gốc sau:

a) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad 0 < t < 1, \\ 1 & \text{nếu} \quad t \geq 1 \end{cases}$ Ds: $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p}$.

b) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad 0 < t < 1, \\ 0 & \text{nếu} \quad t \geq 1 \end{cases}$ Ds: $F(p) = \dfrac{1}{p}(1 - e^{-p})$.

c) $f(t) = \begin{cases} t & \text{nếu} \quad 0 < t < 1, \\ 1 & \text{nếu} \quad t \geq 1 \end{cases}$ Ds: $F(p) = \dfrac{1}{p^2}(1 - e^{-p})$.

Bài 7. Tìm ảnh của các hàm gốc sau:

a) $f(t) = 5 - 3e^{-2t}$. Ds: $F(p) = \dfrac{2(p+5)}{p(p+2)}$.

b) $f(t) = 3 + t + e^{-t}\sin 2t$. Ds: $F(p) = \dfrac{3}{p} + \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{2}{(p+1)^2 + 4}$.

c) $f(t) = te^{-2t} + 3t^2e^{-t}$. Ds: $F(p) = \dfrac{1}{(p+2)^2} + \dfrac{6}{(p+1)^3}$.

d) $f(t) = t^3e^{-3t} + 4e^{-t}\cos 3t$. Ds: $F(p) = \dfrac{6}{(p+3)^4} + \dfrac{4(p+1)}{(p+1)^2 + 9}$.

e) $f(t) = 2e^{at} - e^{-at}$. Ds: $F(p) = \dfrac{p+3a}{p^2 - a^2}$.

f) $f(t) = te^{-3t} + 2\sin t$. Ds: $F(p) = \dfrac{1}{(p+3)^2} + \dfrac{2}{p^2+1}$.

g) $f(t) = t\sin^2 t$. Ds: $F(p) = \dfrac{1}{2p^2} + \dfrac{p^2 - 4}{2(p^2+4)^2}$.

h) $f(t) = te^t\cos t$. Ds: $F(p) = \dfrac{p(p+2)}{(p^2 - 2p + 2)^2}$.

i) $f(t) = t^2e^t\sin t$. Ds: $F(p) = \dfrac{2(3p^2 - 4p + 2)}{(p^2 - 2p + 2)^3}$.

j) $f(t) = \cos^3 t$. Ds: $F(p) = \dfrac{3p}{4(p^2+1)} + \dfrac{p}{4(p^2+9)}$.

k) $f(t) = e^{-2t}\displaystyle\int_0^t \tau\sin\tau d\tau$. Ds: $F(p) = \dfrac{2}{\left[(p+2)^2 + 1\right]^2}$.

l) $f(t) = \int_0^t \tau e^{-\tau} \sin \tau d\tau$. Ds: $F(p) = \dfrac{2(p+1)}{p(p^2+2p+2)^2}$.

m) $f(t) = te^{-2t} \int_0^t \cos 4\tau d\tau$. Ds: $F(p) = \dfrac{2(p+2)}{(p^2+4p+20)^2}$.

n) $f(t) = e^t \int_0^t e^{-\tau} d\tau$. Ds: $F(p) = \dfrac{1}{p(p-1)}$.

Bài 8. Hàm Gamma, kí hiệu là $\Gamma(x)$, được định nghĩa bởi tích phân

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

a) Chứng tỏ rằng: với $x > 0$, ta có $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

b) Cho $\Gamma(1) = 1$, chứng minh rằng $\Gamma(n+1) = n!$. n là số nguyên dương.

c) Tính $\Gamma(\frac{3}{2})$ và $\Gamma(\frac{5}{2})$. biết rằng $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Ds: $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Bài 9. Hàm Bessel bậc 0 Khi một hàm số có thể khai triển thành chuỗi Taylor thì nói chung ta có thể thực hiện phép biến đổi Laplace của hàm này bằng cách lấy biến đổi Laplace từng số hạng của chuỗi. Hãy sử dụng phương pháp trên để tìm ảnh Laplace của hàm Bessel bậc 0, kí hiệu là $J_0(t)$, mà khai triển thành chuỗi Taylor tại 0 của nó là

$$J_0(t) = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{t^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

Ds: $L(J_0) = \dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$.

Bài 10. Chứng minh các tính chất của phép biến đổi Laplace nêu ở Mục 1.2.3.

Bài 11. Tìm gốc của các hàm sau:

a) $F(p) = \dfrac{2}{p-1} - \dfrac{3}{p^2+5}$. Ds: $f(t) = 2e^t - \dfrac{3}{\sqrt{5}} \sin \sqrt{5}t$.

b) $F(p) = \dfrac{1}{p^2+6p+10}$. Ds: $f(t) = e^{-3t} \sin t$.

c) $F(p) = \dfrac{p^2}{(p-1)^3}$. Ds: $f(t) = e^t + 2te^t + \frac{1}{2}t^2e^t$.

d) $F(p) = \dfrac{3}{(p^2+1)(p^2+4)}$. Ds: $f(t) = \sin t - \dfrac{1}{2}\sin 2t$.

e) $F(p) = \dfrac{7p-1}{(p+1)(p+2)(p-3)}$. Ds: $f(t) = 2e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{3t}$.

f) $F(p) = \dfrac{2p+16}{p^2+4p+13}$. Ds: $f(t) = 2e^{-2t}(\cos 3t + 2\sin 3t)$.

g) $F(p) = \dfrac{2p+4}{p^2-1}$. Ds: $f(t) = 3e^t - e^{-t}$.

h) $F(p) = \dfrac{7}{(p+2)^2+3}$. Ds: $f(t) = \dfrac{7}{\sqrt{3}}e^{-2t}\sin 3t$.

Bài 12. Áp dụng phép biến đổi Laplace, giải các phương trình vi phân sau:

a) $y' + 3y = e^{-t}$; $y(0) = 1$. Ds: $y(t) = \dfrac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t})$.

b) $y' - y = e^t$; $y(0) = 1$. Ds: $y(t) = (t+1)e^t$.

c) $y'' + 4y = \sin t$; $y(0) = 0, y'(0) = 1$. Ds: $y(t) = \dfrac{1}{3}\sin t + \dfrac{2}{3}\sin 2t$.

d) $y'' + 3' + 2y = e^{-3t}$; $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Ds: $y(t) = \dfrac{1}{2}e^{-3t} - 2e^{-2t} + \dfrac{3}{2}e^{-t}$.

e) $y'' + 2y' = 4$; $y(0) = 1, y'(0) = -4$. Ds: $y(t) = 3e^{-2t} + 2t - 2$.

f) $y'' + 9y = 20e^{-t}$; $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Ds: $y(t) = 2e^{-t} + \sin 3t - 2\cos 3t$.

g) $y'' + 9y = \cos 3t$; $y(0) = 1, y'(0) = -1$.

Ds: $y(t) = \cos 3t - \dfrac{1}{3}\sin 3t + \dfrac{1}{6}t\sin 3t$.

Bài 13. Cho hàm hai biến $u(x,t)$ $(a < x < b, t > 0)$. Đặt $U(x,p) = L(u(x,t))$. Hãy xác định các ảnh sau theo $U(x,p)$ và $u(x,t)$.

a) $\dfrac{\partial u}{\partial t}$. Ds: $pU(x,p) - u(x,0)$.

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Ds: $p^2U(x,p) - pu(x,0) - \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)$.

c) $\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Ds: $\dfrac{\partial U(x,p)}{\partial x}$.

d) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Ds: $\dfrac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2}$.

Chương 2

GIỚI THIỆU VỀ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

2.1. Các khái niệm

2.1.1 Định nghĩa

Phương trình đạo hàm riêng (partial diferential equation) là phương trình liên hệ giữa hàm nhiều biến cần tìm, các đạo hàm riêng của nó và các biến số.

Cấp của phương trình là cấp cao nhất của đạo hàm riêng có mặt trong phương trình đó.

Giải phương trình đạo hàm riêng là đi tìm hàm nhiều biến thỏa phương trình đó. Hàm số thỏa phương trình được gọi là *nghiệm* của phương trình. Các khái niệm về nghiệm tổng quát và nghiệm riêng được định nghĩa tương tự như đối với phương trình vi phân (thường).

2.1.2 Một số ví dụ

Ví dụ 2.1. Phương trình

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2y\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0$$

là phương trình đạo hàm riêng cấp hai của hàm hai biến $z(x, y)$. Phương trình này có nghiệm tổng quát là

$$z(x, y) = ax + ay^2 + b$$

trong đó, a, b là các hằng số.

Ví dụ 2.2. Hàm hai biến

$$y(x,t) = \varphi(ct - x) + \psi(ct + x),$$

trong đó φ và ψ là các hàm số khả vi, là nghiệm của phương trình đạo hàm riêng cấp hai

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\Big(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big)^2 \quad (c \text{ là hằng số dương}).$$

Ví dụ 2.3. Phương trình đạo hàm riêng cấp một

$$y^2 z\frac{\partial z}{\partial x} + x^2 z\frac{\partial z}{\partial y} = xy^2$$

có nghiệm $z(x,y)$ được cho dưới dạng hàm ẩn

$$\varphi\big(x^2 - z^2, x^3 - y^3\big) = 0$$

trong đó, φ là hàm số tùy ý khả vi.

2.2. Cách giải một số phương trình đơn giản

Nói chung, giải phương trình đạo hàm riêng tương tự như phương trình vi phân (thường).

Ví dụ 2.4. Để giải phương trình

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 + y$$

ta tích phân hay vế phương trình theo biến x và tìm được nghiệm là

$$z(x,y) = \frac{x^3}{3} + yx + C(y),$$

ở đây, $C(y)$ là hàm số theo biến y (là hằng số đối với biến x).

Ví dụ 2.5. Xét phương trình

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = 4xy$$

Để giải phương trình này, ta đặt

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \implies \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}$$

Khi đó, phương trình trở thành

$$y\frac{\partial p}{\partial y} + p = 4xy$$

Đây là phương trình vi phân cấp 1 hàm p biến y.

* $y = 0$: thử trực tiếp ta có $z = 0$ là nghiệm của phương trình.

* $y \neq 0$: chia hai vế phương trình cho y, ta được phương trình tuyến tính cấp 1 không thuần nhất

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{y}p = 4x$$

Nghiệm của phương trình cho bởi

$$\begin{aligned}
p =& e^{\int -\frac{dy}{y}}\left[\int 4xe^{\int \frac{dy}{y}}dy + C_1(x)\right] = e^{-\ln y}\left[\int 4xe^{\ln y}dy + C_1(x)\right] \\
=& \frac{1}{y}\left[\int 4xydy + C_1(x)\right] = \frac{1}{y}\left[2xy^2 + C_1(x)\right] \\
=& 2xy + \frac{1}{y}C_1(x).
\end{aligned}$$

Như vậy,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \frac{1}{y}C_1(x) \implies z(x,y) = x^2y + \frac{1}{y}\varphi(x) + \psi(y).$$

Ví dụ 2.6. Giải phương trình đạo hàm riêng cấp hai

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 z = xy^2$$

Để giải phương trình này, chúng ta xem đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất hàm z biến x (xem y là hằng số) và có thể giải dựa vào định lí cộng nghiệm và nghiệm của phương trình đặc trưng như đã biết. Tuy nhiên, ở đây, chúng tôi sẽ trình bày cách giải dựa vào phép biến đổi Laplace như sau:

Đặt $L(z) = F(p)$ (xem x là biến số, y là hằng số) thì

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = p^2F(p) - pz(0,y) - \frac{\partial z}{\partial x}(0,y)$$

Mặt khác $L(x) = \frac{1}{p^2}$ nên khi đó, phương trình ảnh tương ứng với phương trình đã cho là

$$p^2F(p) - pz(0,y) - \frac{\partial z}{\partial x}(0,y) - y^2F(p) = \frac{1}{p^2}y^2$$

hay $(p^2 - y^2)F(p) = y^2\frac{1}{p^2} + C_1(y)p + C_2(y)$

tức là
$$\begin{aligned} F(p) &= y^2\frac{1}{p^2(p^2-y^2)} + C_1(y)\frac{p}{p^2-y^2} + C_2(y)\frac{1}{p^2-y^2} \\ &= \frac{1}{p^2-y^2} - \frac{1}{p^2} + C_1(y)\frac{p}{p^2-y^2} + C_2(y)\frac{1}{p^2-y^2} \\ &= C_1(y)\frac{p}{p^2-y^2} + C_3(y)\frac{1}{p^2-y^2} - \frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

Do vậy $z(x,y) = L^{-1}(F(p)) = C_1(y)\operatorname{ch} yx + \frac{C_3(y)}{y}\operatorname{sh} yx - x$.

Mà

$$\operatorname{ch} yx = \frac{e^{yx} + e^{-yx}}{2} \quad ; \quad \operatorname{sh} yx = \frac{e^{yx} - e^{-yx}}{2}$$

nên thay vào nghiệm vừa tìm được và rút gọn thì

$$z(x,y) = \varphi(y)e^{yx} + \psi(y)e^{-yx} - x,$$

với φ và ψ là hai hàm khả vi tùy ý nào đó.

Ví dụ 2.7. Giải phương trình đạo hàm riêng

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + ay$$

Ta có thể giả thiết $y \neq 0$ và chia hai vế phương trình cho y thì phương trình trở thành

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x}{y} + a$$

Khi đó, ta tích phân hai vế phương trình lần lượt theo biến y rồi theo biến x thì được

$$z(x,y) = \frac{1}{x^2}\ln|y| + axy + \varphi(x) + \psi(y)$$

Trong các ví dụ sau đây, chúng ta sẽ sử dụng phép biến đổi Laplace để giải một số phương trình đạo hàm riêng (với điều kiện biên cho trước)

Ví dụ 2.8. Giải phương trình đạo hàm riêng

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = x, \quad x > 0, t > 0$$

thỏa điều kiện $u(x,0) = u(0,t) = 0$.

Đặt $\quad U(x,p) = L(u(x,t)) \quad$ thì

$$L(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial U(x,p)}{\partial x} \quad \text{và} \quad L(\frac{\partial u}{\partial t}) = pU(x,p) - u(x,0)$$

Thực hiện biến đổi Laplace đối với biến t hai vế phương trình, ta được:

$$L(\frac{\partial u}{\partial x}) + L(\frac{\partial u}{\partial t}) = L(x)$$

hay
$$\frac{\partial U(x,p)}{\partial x} + pU(x,p) - u(x,0) = \frac{x}{p}$$

Từ đó, ta được phương trình vi phân tuyến tính cấp một

$$\frac{\partial U(x,p)}{\partial x} + pU(x,p) = \frac{x}{p}$$

với nghiệm được cho bởi

$$\begin{aligned}
U(x,p) &= e^{\int -pdx}\Big[\int e^{\int pdx}\frac{x}{p}dx + c(p)\Big] \\
&= e^{-px}\Big[\frac{1}{p}\int e^{px}xdx + c(p)\Big] \\
&= e^{-px}\Big[\frac{1}{p}(\frac{x}{p}e^{px} - \frac{1}{p^2}e^{px}) + c(p)\Big] \\
&= \frac{x}{p^2} - \frac{1}{p^3} + c(p)e^{-px}
\end{aligned}$$

Mặt khác, $U(0,p) = L(u(0,t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}u(0,t)dt = 0$ (do $u(0,t) = 0$).

Như vậy $U(0,p) = 0$ suy ra $0 = 0 - \frac{1}{p^3} + c(p)$ hay $c(p) = \frac{1}{p^3}$.

Do đó, nghiệm của phương trình ảnh là $U(x,p) = \frac{x}{p^2} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^3}e^{-px}$.

Thực hiện phép biến đổi Laplace ngược, ta tìm được nghiệm của phương trình đã cho là

$$u(x,t) = xt - \frac{t^2}{2} + \mu(t-x)\frac{(t-x)^2}{2}$$

$$= \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{nếu} \quad t \geq x \\ xt - \frac{t^2}{2} & \text{nếu} \quad t < x \end{cases}$$

Ví dụ 2.9. Giải phương trình đạo hàm riêng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 2, t > 0$$

thỏa điều kiện $u(0,t) = u(2,t) = 0, u(x,0) = 3\sin 2\pi x$.

Đặt $\quad U(x,p) = L(u(x,t)) \quad$ thì

$$L(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = \frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2} \quad \text{và} \quad L(\frac{\partial u}{\partial t}) = pU(x,p) - u(x,0)$$

Thực hiện biến đổi Laplace đối với biến t hai vế phương trình, ta được:

$$L(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = L(\frac{\partial u}{\partial t})$$

hay

$$\frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2} = pU(x,p) - u(x,0)$$

Khi đó, ta được phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

$$\frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2} - pU(x,p) = -3\sin 2\pi x \quad (*)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

$$\frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2} - pU(x,p) = 0$$

là

$$U^*(x,p) = Ae^{\sqrt{p}x} + Be^{-\sqrt{p}x}$$

Phương trình (*) có một nghiệm riêng dạng

$$\overline{U}(x, p) = C\cos 2\pi x + D\sin 2\pi x$$

mà các hệ số C, D thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} -4\pi^2 C - pC &= 0 \\ -4\pi^2 D - pD &= -3 \end{cases} \iff \begin{cases} C &= 0 \\ D &= \dfrac{3}{p+4\pi^2} \end{cases}$$

Suy ra $\overline{U}(x, p) = \dfrac{3}{p+4\pi^2}\sin 2\pi x$. Do đó, phương trình (*) có nghiệm tổng quát là

$$U(x, p) = Ae^{\sqrt{p}x} + Be^{-\sqrt{p}x} + \frac{3}{p+4\pi^2}\sin 2\pi x$$

Mặt khác, $u(x, t) = 0$, $u(2, t) = 0$ cho ta

$$U(0, p) = L(u(0, t)) = 0 \quad \text{và} \quad U(2, p) = L(u(2, t)) = 0$$

Từ đó, ta có

$$\begin{cases} A + B &= 0 \\ Ae^{2\sqrt{p}} + Be^{-2\sqrt{p}} &= 0 \end{cases} \iff A = B = 0$$

Vậy nghiệm của phương trình ảnh là $U(x, p) = \dfrac{3}{p+4\pi^2}\sin 2\pi x$ và nghiệm của phương trình đã cho là $u(x, t) = 3e^{-4\pi^2 t}\sin 2\pi x$.

2.3. BÀI TẬP

Bài 1. Giải phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial t} = x, \quad x > 0, t > 0$$

thỏa điều kiện $u(x, 0) = u(0, t) = 0$.

Ds: $u(x, t) = t - \mu\left(t - \dfrac{x^2}{2}\right)\left(t - \dfrac{x^2}{2}\right)$.

Bài 2. Giải phương trình

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = x, \quad x > 0, t > 0$$

thỏa điều kiện $u(x,0) = u(0,t) = 0$.

Đs: $u(x.t) = x(1 - e^{-t})$.

Bài 3. Giải phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial t} = x^3, \quad x > 0, t > 0$$

thỏa điều kiện $u(x,0) = u(0,t) = 0$.

Đs: $u(x.t) = x^2t - t^2 + \mu\left(t - \frac{x^2}{2}\right)\left(t - \frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{3x^2}{2} - t\right)$.

Bài 4. Giải phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial t} = x, \quad x > 0, t > 0$$

thỏa điều kiện $u(0,t) = 0, u(x,0) = \varphi(x)$.

Đs: $u(x.t) = \varphi(x) + t - \mu\left(t - \frac{x^2}{2}\right)\left(\varphi(x) + t - \frac{x^2}{2}\right)$.

Bài 5. Giải phương trình

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = x - u, \quad x > 0, t > 0$$

thỏa điều kiện $u(x,0) = u(0,t) = 0$.

Đs: $u(x.t) = \frac{x}{2}(1 - e^{-2t})$.

Bài 6. Giải phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k\sin \pi x, \quad 0 < x < 1, t > 0$$

thỏa điều kiện $u(x,0) = u(0,t) = u(1,t) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$.

Đs: $u(x.t) = \frac{k}{\pi^2}(1 - \cos c\pi t)\sin \pi x$.

Bài 7. Giải phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 2, t > 0$$

thỏa điều kiện $u(x,0) = u(0,t) = u(2,t) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin \pi x$.

Đs: $u(x.t) = -\frac{\sqrt{6}}{\pi}\sin\frac{\sqrt{6}\pi t}{6}\sin \pi x$.

Chương 3

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP MỘT

3.1. Các khái niệm

Định nghĩa 3.1. *Phương trình đạo hàm riêng cấp một* là phương trình có dạng

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0 \tag{3.1}$$

trong đó, hàm $F(x, u, p) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$ liên tục, khả vi theo các biến trên tập mở

$$G = \{(x, u, p) | x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n\}$$

đồng thời

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)^2 \neq 0.$$

Chú ý rằng ta đã kí hiệu $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ với $p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, i = \overline{1, n}.$

Thông thường, ta gặp hai dạng phương trình đạo hàm riêng cấp một sau đây:

Phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp một thuần nhất

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \tag{3.2}$$

Phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp một không thuần nhất

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \tag{3.3}$$

trong đó, $P_i(i = \overline{1,n})$ và f là các hàm khả vi. $P_i(i = \overline{1,n})$ không đồng thời bằng không trong miền xác định.

Định nghĩa 3.2. *Nghiệm* của phương trình đạo hàm riêng cấp một dạng (3.1) là hàm nhiều biến $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thỏa mãn

(i) $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}^n$.

(ii) Tồn tại các đạo hàm riêng cấp một $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ liên tục, $i = \overline{1,n}$.

(iii) Thay $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và các đạo hàm $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vào vế trái của (3.1) thì ta được đẳng thức đúng.

Nghiệm tổng quát là nghiệm có dạng $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n, C)$ với C là hằng số tùy ý. Trong công thức nghiệm tổng quát, nếu ta cho hằng số $C = C_0$ thì ta được nghiệm riêng $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n, C_0)$ của phương trình. Thông thường, nghiệm riêng của phương trình thỏa mãn một điều kiện ban đầu nào đó.

Định nghĩa 3.3. (Bài toán Cauchy của phương trình đạo hàm riêng cấp một) Bài toán Cauchy của phương trình đạo hàm riêng cấp một là bài toán yêu cầu giải phương trình (3.1) tìm nghiệm $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thỏa điều kiện ban đầu

$$x_1 = x_0, u(x_0, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_2, \ldots, x_n)$$

3.2. Sự tồn tại nghiệm của phương trình đạo hàm riêng cấp 1

Định lí 3.1. *Xét phương trình (3.2). Nếu hệ phương trình vi phân đối xứng*

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} \tag{3.4}$$

có nghiệm

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_2, \\ \dots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{n-1}, \end{cases} \tag{3.5}$$

(với a_i là các hằng số, $i = \overline{1, n-1}$) thì phương trình (3.2) có nghiệm

$$u = \phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) \qquad (*)$$

trong đó ϕ là hàm tùy ý khả vi.

Chứng minh

Do các hàm $P_i, i = \overline{1, n}$ không đồng thời bằng không nên ta có thể giả sử $P_n \neq 0$.

Từ (3.5) ta suy ra $d\psi_i = 0, i = \overline{1, n-1}$. Khi đó, lấy vi phân hai vế của $(*)$ ta được

$$du = \frac{\partial \phi}{\partial \psi_1} d\psi_1 + \frac{\partial \phi}{\partial \psi_2} d\psi_2 + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial \psi_{n-1}} d\psi_{n-1} = 0$$

Cũng từ $(*)$, chúng ta thay các hàm $\psi_i = \psi_i(x_1, x_2, \dots x_n)$ thì được biểu thức của u theo các biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ là $u = \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và do đó

$$du = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_{n-1}} dx_{n-1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} dx_n = 0 \qquad (**)$$

Mặt khác, hệ (3.4) tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{P_1} &= \dfrac{dx_n}{P_n}, \\ \dfrac{dx_2}{P_2} &= \dfrac{dx_n}{P_n}, \\ \dots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{P_{n-1}} &= \dfrac{dx_n}{P_n}, \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_n} &= \dfrac{P_1}{P_n}, \\ \dfrac{dx_2}{dx_n} &= \dfrac{P_2}{P_n}, \\ \dots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dx_n} &= \dfrac{P_{n-1}}{P_n}. \end{cases}$$

tức là chúng ta có

$$dx_i = \frac{P_i}{P_n} dx_n, i = \overline{1, n-1}.$$

Thay vào $(**)$, chúng ta được

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}\Big(\frac{P_1}{P_n} dx_n\Big) + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}\Big(\frac{P_2}{P_n} dx_n\Big) + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_{n-1}}\Big(\frac{P_{n-1}}{P_n} dx_n\Big) + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

hay

$$\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}P_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}P_2 + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial x_{n-1}}P_{n-1} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_n}P_n\Big)\frac{dx_n}{P_n} = 0.$$

Do vậy chúng ta có

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}P_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}P_2 + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial x_{n-1}}P_{n-1} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_n}P_n = 0.$$

nghĩa là $u = \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và kéo theo $u = \phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$ là nghiệm của phương trình (3.2). □

Định lí 3.2. *Xét phương trình (3.3). Nếu hệ phương trình vi phân đối xứng*

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{f} \qquad (3.6)$$

có nghiệm

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) &= a_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) &= a_2, \\ \qquad \ldots \\ \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) &= a_n, \end{cases} \qquad (3.7)$$

(với a_i là các hằng số, $i = \overline{1, n}$) thì phương trình (3.3) có nghiệm

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = 0 \qquad (3*)$$

trong đó Φ là hàm tùy ý khả vi.

Chứng minh

Xét hệ thức (3∗) với $\psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = a_i, i = \overline{1, n}$ được xác định ở (3.7) là nghiệm của hệ (3.6).

Thay $\psi = \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ vào hệ thức (3∗) ta được hệ thức

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0.$$

Khi đó, theo công thức đạo hàm hàm ẩn, ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial\Psi}{\partial u}} \qquad (i = \overline{1, n}) \qquad (4*)$$

Thay (4*) vào phương trình (3.3), ta được

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\Big(-\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}}{\frac{\partial \Psi}{\partial u}}\Big) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$$

hay

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + f(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial \Psi}{\partial u} = 0 \qquad (5*)$$

Phương trình (5*) là phương trình đạo hàm riêng cấp một thuần nhất hàm Ψ theo các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$. Theo định lí 3.1, phương trình (5*) có nghiệm là $\Psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = 0$ với điều kiện (3.6), (3.7) được thỏa. □

3.3. Áp dụng cho trường hợp hàm hai biến và hàm ba biến

3.3.1 Bài toán tìm nghiệm tổng quát của phương trình đạo hàm riêng cấp một thuần nhất và không thuần nhất

Ví dụ 3.1. Giải phương trình $2xz_x - yz_y = -2x - 2z$.

* Hệ phương trình vi phân đối xứng:

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{-2x-2z}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{2x} = -\dfrac{dy}{y} \\ \dfrac{dx}{2x} = \dfrac{dz}{-2x-2z} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln|x| = \ln|\dfrac{k_1}{y}| \\ \dfrac{-2x-2z}{2x} = \dfrac{dz}{dx} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \ln|x| = \ln(\dfrac{k_1}{y})^2 \\ \dfrac{dz}{dx} + \dfrac{1}{x}z = -1 \quad (*) \end{cases} \qquad (1)$$

Phương trình $(*)$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp một không thuần nhất, có nghiệm là

$$z = e^{-\int \frac{dx}{x}}\Big[\int (-1)e^{\int \frac{dx}{x}}dx + k_2\Big] = \frac{1}{x}(-\frac{x^2}{2} + k_2)$$

Khi đó, hệ (1) có nghiệm là

$$\begin{cases} xy^2 &= k_1^2 = a_1 \\ 2xz + x^2 &= 2k_2 = a_2 \end{cases}$$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là

$$\varphi(xy^2, 2xz + x^2) = 0$$

Ví dụ 3.2. Giải phương trình $(y+z)z_x + (x+z)z_y = x + y$.

$*$ Hệ phương trình vi phân đối xứng:

$$\begin{aligned}
& \frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y} \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)} = \frac{dx-dy}{y-x} = \frac{dx-dz}{z-x} \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)} = \frac{d(x-y)}{-(x-y)} = \frac{d(x-z)}{-(x-z)} \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} \dfrac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)} &= -\dfrac{d(x-y)}{(x-y)} \\ \dfrac{d(x-y)}{(x-y)} &= \dfrac{d(x-z)}{(x-z)} \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} \ln\left|\sqrt{x+y+z}\right| &= \ln\left|\frac{k_1}{x-y}\right| \\ \ln|x-y| &= \ln|k_2(x-z)| \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} \sqrt{x+y+z} &= \dfrac{k_1}{x-y} \\ x-y &= k_2(x-z) \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} (x-y)\sqrt{x+y+z} &= k_1 \\ \dfrac{x-y}{x-z} &= k_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy, nghiệm của phương trình đã cho là

$$\varphi\Big((x-y)\sqrt{x+y+z}, \frac{x-y}{x-z}\Big) = 0$$

Ví dụ 3.3. Giải phương trình $xyu_x - x^2u_y + y^2u_z = 0$.

* Hệ phương trình vi phân đối xứng:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-x^2} = \frac{dz}{y^2}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{xy} &= \dfrac{dy}{-x^2} \\ \dfrac{dz}{y^2} &= \dfrac{dy}{-x^2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} xdx &= -ydy \\ dz &= -\dfrac{y^2}{x^2}dy \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 &= -y^2 + k_1^2 \\ dz &= \dfrac{y^2}{y^2 - k_1^2}dy \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = k_1^2 \\ z = \displaystyle\int \Big(1 + \frac{k_1^2}{y^2 - k_1^2}\Big)dy \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = k_1^2 \\ z = y + \dfrac{k_1}{2}\ln\left|\dfrac{y - k_1}{y + k_1}\right| + k_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 &= k_1^2 \\ z - y &- \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\ln\left|\dfrac{y - \sqrt{x^2+y^2}}{y + \sqrt{x^2+y^2}}\right| = k_2 \end{cases}$$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là

$$u(x, y, z) = \varphi\Big(x^2 + y^2, z - y - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\ln\left|\frac{y - \sqrt{x^2+y^2}}{y + \sqrt{x^2+y^2}}\right|\Big)$$

3.3.2 Bài toán biên trị (Bài toán tìm nghiệm riêng với điều kiện cho trước)

Ví dụ 3.4. Giải phương trình $xz_x + yz_y = z$ với điều kiện biên

$$\begin{cases} x &= t, \\ y &= 2t^2 + t, \\ z &= 1 + t^3. \end{cases}$$

Trước hết, ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình $xz_x + yz_y = z$. Hệ phương trình vi phân đối xứng:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x} \\ \dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ln|y| = \ln|k_1 x| \\ \ln|z| = \ln|k_2 x| \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = k_1 x \\ z = k_2 x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x} = k_1 \\ \dfrac{z}{x} = k_2 \end{cases}$$

Suy ra nghiệm tổng quát có dạng

$$\varphi(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{z}{x} = \psi(\frac{y}{x}) \quad \text{tức là} \quad z = x\psi(\frac{y}{x})$$

Bây giờ, ta tìm nghiệm riêng thỏa điều kiện biên $x = t, y = 2t^2 + t, z = 1 + t^3$.

Thay $x = t, y = 2t^2 + t, z = 1 + t^3$ vào nghiệm $z = y\psi(\frac{x}{y})$, ta được

$$t\psi(\frac{2t^2+t}{t}) = 1 + t^3 \quad \text{hay} \quad \psi(2t+1) = t^2 + \frac{1}{t}$$

Dặt $\omega = 2t + 1$ thì $t = \dfrac{\omega - 1}{2}$. Ta có

$$\psi(\omega) = \left(\frac{\omega-1}{2}\right)^2 + \frac{2}{\omega - 1}$$

Từ đó,

$$\psi(\frac{y}{x}) = \left(\frac{y-x}{2x}\right)^2 + \frac{2x}{y-x}$$

Vậy, nghiệm cần tìm là

$$z(x,y) = x\left[\left(\frac{y-x}{2x}\right)^2 + \frac{2x}{y-x}\right]$$

Ví dụ 3.5. Giải phương trình $z_x + z_y = z$ với điều kiện biên

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 - y^2 = z. \end{cases}$$

Ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình bằng cách giải hệ phương trình vi phân đối xứng:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{z}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} dy &= dx \\ \dfrac{dz}{z} &= dx \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y &= x + k_1 \\ \ln|z| &= x + k_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y - x = k_1 \\ z = k_3 e^x \quad (k_3 = e^{k_2}) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y - x = k_1 \\ \dfrac{z}{e^x} = k_3 \end{cases}$$

Do vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$\varphi(y - x, \frac{z}{e^x}) = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{z}{e^x} = \psi(y - x) \quad \text{tức là} \quad z = e^x\psi(y - x)$$

Bây giờ, từ điều kiện

$$\begin{cases} x + y &= 1. \\ x^2 - y^2 &= z. \end{cases}$$

Đặt $x = t$ ta được

$$\begin{cases} x &= t, \\ y &= 1 - t. \\ z &= 2t - 1. \end{cases}$$

Thay vào công thức nghiệm $z = e^x\psi(y - x)$, ta có

$$2t - 1 = e^t\psi(1 - 2t) \quad \text{hay} \quad \psi(1 - 2t) = e^{-t}(2t - 1)$$

Đặt $\omega = 1 - 2t$, ta có $\frac{1 - \omega}{2}$. Khi đó, $\psi(\omega) = -\omega e^{\frac{\omega - 1}{2}}$. Suy ra

$$\psi(y - x) = (x - y)e^{\frac{y - x - 1}{2}}$$

Vậy, nghiệm riêng của phương trình là

$$z(x, y) = (x - y)e^{\frac{y + x - 1}{2}}$$

3.4. Một số ứng dụng của phương trình dạo hàm riêng cấp 1

3.4.1 Pháp tuyến và mặt phẳng tiếp xúc của mặt cong

Vectơ gradient

Cho mặt cong $(S) : z = z(x, y)$

* Ta viết lại phương trình mặt cong (S) dạng $z - z(x,y) = 0$ rồi lấy vi phân toàn phần hai vế phương trình này, chúng ta được

$$z_x dx + z_y dy - dz = 0$$

Khi đó, tại mỗi điểm $M(x,y,z)$ trên mặt cong S, ta có $\overrightarrow{dM} = (dx, dy, dz)$ là vectơ tiếp tuyến của (S) nên từ đẳng thức trên, ta có $\overrightarrow{n} = (z_x, z_y, -1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt cong tại $M(x,y,z)$.

** Tương tự, nếu ta viết phương trình mặt cong dưới dạng $F(x,y,z) = 0$ thì ta được

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$$

và cũng suy ra rằng vectơ gradient $\overrightarrow{\nabla F} = (F_x, F_y, F_z)$ cũng chính là vectơ pháp tuyến của mặt cong (S) tại điểm M.

Từ đó, chúng ta có thể xác định phương trình mặt phẳng tiếp xúc cũng như phương trình pháp tuyến của mặt cong (S) tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (S)$

Phương trình mặt phẳng tiếp xúc (tiếp diện) của mặt cong

Cho $(S) : z = z(x,y)$ là mặt cong thì mặt phẳng tiếp xúc với (S) và đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (S)$ có phương trình là

$$z_x(x - x_0) + z_y(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

hoặc

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0$$

Phương trình pháp tuyến của mặt cong

Pháp tuyến của mặt cong $(S) : z = z(x,y)$ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{n}$ hoặc $\overrightarrow{\nabla F}$ được xác định ở trên. Do đó, phương trình pháp tuyến của (S), đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (S)$ có dạng

+ Phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ z = z_0 + a_3 t, \end{cases} \quad t \text{ là tham số.}$$

+ Phương trình chính tắc:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3},$$

trong đó (a_1, a_2, a_3) là tọa độ của vectơ chỉ phương của pháp tuyến.

3.4.2 Tìm thừa số tích phân và giải phương trình vi phân

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{3.8}$$

Chúng ta đã biết nếu phương trình (3.8) là phương trình vi phân toàn phần $\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$ thì nó sẽ có nghiệm dạng $F(x,y) = C$ với $F(x,y)$ là hàm số thỏa mãn $dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Bây giờ, chúng ta sẽ đề cập đến phương trình dạng (3.8) nhưng bản thân nó chưa phải là phương trình vi phân toàn phần. Nếu tồn tại hàm số $z = z(x,y)$ sao cho phương trình

$$z(x,y)P(x,y)dx + z(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

là phương trình vi phân toàn phần thì hàm số $z = z(x,y)$ được gọi là thừa số tích phân. Sau đây, ta sẽ trình bày cách tìm thừa số tích phân thông qua việc giải phương trình đạo hàm riêng.

Nếu $z = z(x,y)$ là thừa số tích phân của phương trình (3.8) thì ta phải có

$$\frac{\partial(zP)}{\partial y} = \frac{\partial(zQ)}{\partial x} \Longleftrightarrow Pz_y + zP_y = Nz_x + zQ_x$$

Khi đó, ta có phương trình đạo hàm riêng cấp một hàm $z = z(x,y)$

$$Qz_x - Pz_y = (P_y - Q_x)z$$

Vậy, thừa số tích phân chính là nghiệm của phương trình đạo hàm riêng ở trên. (Chúng ta có thể chọn nghiệm riêng đơn giản nhất.)

3.4.3 Một số ví dụ

Ví dụ 3.6. Tìm phương trình các mặt cong $(S): z = z(x,y)$, biết (S) có mặt phẳng tiếp xúc luôn cắt trục Ox tại $x_0 = 1$. Từ đó, tìm mặt cong trong họ nghiệm này chứa đường tròn

$$\begin{cases} x &= 0, \\ y^2 + z^2 &= 25. \end{cases}$$

Ta có $(S): z = z(x,y)$ nên vectơ pháp tuyến của S là $\overrightarrow{n} = (z_x, z_y, -1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc của S thì (P) qua $M_0(1,0,0)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = (z_x, z_y, -1)$. Suy ra, phương trình (P) có dạng

$$z_x(x-1) + z_y(y-0) - (z-0) = 0$$

tức là $\quad (x-1)z_x - yz_y = z$. Đây là phương trình đạo hàm riêng cấp một không thuần nhất. Giải phương trình này ta sẽ tìm được phương trình của họ mặt cong (S).

Hệ phương trình vi phân đối xứng:

$$\frac{dx}{x-1} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x-1} \\ \dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x-1} \end{cases} \iff \begin{cases} \ln|y| = \ln|k_1(x-1)| \\ \ln|z| = \ln|k_2(x-1)| \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = k_1(x-1) \\ z = k_2(x-1) \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{y}{x-1} = k_1 \\ \dfrac{z}{x-1} = k_2 \end{cases}$$

Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình trên là

$$\varphi\left(\frac{y}{x-1}, \frac{z}{x-1}\right) = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{z}{x-1} = \psi\left(\frac{y}{x-1}\right)$$

Vậy họ các mặt cong $(S) : z = (x-1)\psi\left(\dfrac{y}{x-1}\right)$.

Để tìm mặt cong trong họ nghiệm này chứa đường tròn

$$\begin{cases} x = 0, \\ y^2 + z^2 = 25. \end{cases}$$

ta viết phương trình đường tròn dưới dạng

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 5\cos t, \\ z = 5\sin t. \end{cases}$$

Thay vào nghiệm $(S) : z = (x-1)\psi\left(\dfrac{y}{x-1}\right)$ ta được

$$5\sin t = -\psi(-5\cos t)$$

Đặt $\omega = -5\cos t$ thì $\sin t = \pm\frac{1}{5}\sqrt{25-\omega^2}$. Vì vậy

$$\psi(\omega) = \pm\sqrt{25-\omega^2}$$

Từ đó, suy ra phương trình mặt cong cần tìm là

$$z = \pm(x-1)\sqrt{25-\left(\frac{y}{x-1}\right)^2}$$

hay

$$z^2 = 25(x-1)^2 - y^2$$

Ví dụ 3.7. Tìm phương trình các mặt cong $(S) : z = z(x,y)$ có **pháp tuyến** luôn cắt đường thẳng

$$(\triangle) : \begin{cases} x &= y, \\ z &= 0. \end{cases}$$

Gọi M_0 là giao điểm của pháp tuyến của mặt cong S và đường thẳng $(\triangle)$ thì $M_0(a,a,0)$.

Vì $(S) : z = z(x,y)$ nên S có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = (z_x, z_y, -1)$. Khi đó, pháp tuyến $(\triangle)$ của (S) đi qua $M_0(a,a,0)$ và có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{n} = (z_x, z_y, -1)$. Do đó, phương trình $(\triangle)$ có dạng

$$\frac{x-a}{z_x} = \frac{y-a}{z_y} = \frac{z-0}{-1} \iff \frac{z_x}{x-a} = \frac{z_y}{y-a} = -\frac{1}{z}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{x-a}{z_x} &= -\dfrac{1}{z} \\ \dfrac{z_y}{y-a} &= -\dfrac{1}{z} \end{cases} \iff \begin{cases} zz_x &= a-x \\ zz_y &= a-y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} zz_x + x &= a \\ zz_y + y &= a \end{cases} \iff zz_x + x = zz_y + y$$

hay $zz_x - zz_y = y - x$. Đây là phương trình đạo hàm riêng cấp một không thuần nhất mà nghiệm là phương trình của họ mặt cong (S).

Hệ phương trình vi phân đối xứng:

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{-z} = \frac{dz}{y-x}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{z} = -\dfrac{dy}{z} \\ \dfrac{dz}{y-x} = \dfrac{dx}{z} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} dy = -dx \\ zdz = (y-x)dx \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -x + k_1 \\ zdz = (-2x + k_1)dx \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = k_1 \\ \dfrac{z^2}{2} = -x^2 + k_1 x + k_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = k_1 \\ \dfrac{z^2}{2} + x^2 - x(x+y) = k_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = k_1 \\ \dfrac{z^2}{2} - xy = k_2 \end{cases}$$

Suy ra, phương trình trên có nghiệm là

$$\varphi\left(x+y, \frac{z^2}{2} - xy\right) = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{z^2}{2} - xy = \psi(x+y)$$

Vậy, phương trình họ mặt cong $(S) : z = \pm\sqrt{2[xy + \psi(x+y)]}$.

Ví dụ 3.8. Tìm thừa số tích phân và giải phương trình vi phân

$$(y + y^2)dx - (x + 2xy + y^2)dy = 0.$$

Đặt $P(x, y) = y + y^2$, $Q(x, y) = -(x + 2xy + y^2)$, ta có

$$\begin{cases} P_y = 1 + 2y \\ Q_x = -(1+2y) \end{cases} \Longrightarrow P_y - Q_x = 2 + 4y$$

Gọi $z = z(x, y)$ là thừa số tích phân của phương trình đã cho thì ta phải có

$$-(x + 2xy + y^2)z_x - (y + y^2)z_y = (2 + 4y)z$$

Hệ phương trình vi phân đối xứng:

$$\frac{dx}{-(x + 2xy + y^2)} = \frac{dy}{-(y + y^2)} = \frac{dz}{(2 + 4y)z}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{-(y+y^2)} = \dfrac{dz}{(2+4y)z} \\ \dfrac{dx}{x + 2xy + y^2} = \dfrac{dy}{y + y^2} \end{cases} \Longrightarrow \frac{dz}{z} = \frac{-2(1+2y)dy}{y + y^2}$$

Tích phân hai vế phương trình trên, ta được

$$\ln|z| = -2\ln|a(y+y^2)| \quad \text{hay} \quad z = \frac{1}{a^2(y+y^2)^2}$$

Chọn $a = 1$ thì ta được thừa số tích phân $z(x,y) = \dfrac{1}{y+y^2}^{2}$. Nhân thừa số tích phân vào hai vế phương trình đã cho, ta được phương trình vi phân toàn phần

$$\frac{dx}{y+y^2} - \frac{x+2xy+y^2}{(y+y^2)^2}dy = 0$$

Lấy tích phân hai vế phương trình từ $(0,1) \to (x,y)$, ta có

$$\int_0^x \frac{dx}{y+y^2} - \int_1^y \frac{y^2}{(y+y^2)^2}dy = C \text{ hay } \frac{x}{y+y^2} + \frac{1}{1+y} = c$$

3.5. BÀI TẬP

3.5.1 Phương trình đạo hàm riêng cấp một

Bài 1. Giải các phương trình đạo hàm riêng cấp một sau đây:

a) $xu_x + zu_y + yu_z = 0$:

b) $xu_x + zu_y - yu_z = 0$.

c) $xz_x + zz_y + y = 0$.

d) $xyz_x - x^2z_y = y^2$.

e) $z'_x + z'_y = z$.

f) $xz'_x + yz'_y = 2z$.

g) $xz'_x + zz'_y = y$.

h) $az'_x + bz'_y = c$.

i) $xz'_x + zz'_y + y = 0$.

j) $xyz'_y - x^2z'_x = y^2$.

k) $x^2z'_x + y^2z'_y = axy$.

l) $yzz'_x + xzz'_y + zxy = 0$.

m) $(z-y)^2 z'_x + z z'_y = y$.

n) $u'_x + b u'_y + c u'_z = xyz$.

o) $xy^2 z'_x - y^3 z'_y + axz = 0$.

p) $(x+y)(z'_x - z'_y) = z$.

Bài 2. Bằng cách đưa về phương trình đạo hàm riêng cấp một, hãy giải các phương trình sau đây:

a) $y z''_{xy} + z''_{xx} = 4x$.

b) $x z''_{xx} - y z''_{xy} = 2y$.

c) $x z''_{xx} + y z''_{xy} = 0$.

d) $x z''_{xy} - y z''_{yy} = 2x$.

e) $x z''_{xy} - y z''_{yy} + z'_y = 12xy$.

f) $x z''_{xy} - 2x^2 z''_{yy} = z'_y$.

g) $x z''_{xy} - 2y z''_{yy} = 2z'_y + x$.

h) $z''_{xx} + y z''_{xy} = z'_x$.

i) $x z''_{xx} + z''_{xy} + z'_x = 0$.

j) $x z''_{xx} + y z''_{xy} + z'_x = 2x + y$.

Bài 3. Giải các phương trình sau với điều kiện kèm theo:

a) $(1 + \sqrt{z-x-y}) z'_x + z'_y = z$ thỏa $z(x,0) = 2x$.

b) $\sqrt{x} f'_x + \sqrt{y} f'_y + \sqrt{z} f'_z = 0$ thỏa $f(1,y,z) = y - z$.

c) $x z'_x + y z'_z = 0$ thỏa $z(x,1) = x$.

d) $xy z'_y - x^2 z'_x = y^2$ thỏa $z'_x(1,y) = z'_y(1,y)$.

e) $x z'_x + y z'_y = z$ thỏa $x = t, y = 2t^2 + t, z = 1 + t^3$.

f) $x z'_x - y z'_y = z$ thỏa $z'_x(2,y) = 3z'_y(2,y)$.

g) $x z'_x + y z'_y = z$ thỏa $x = t, y = t^2, z = t^3 + 5$.

h) $x z'_x - y z'_y = z$ thỏa $x = 2t + 2, y = t^{-1}, z = t^2$.

i) $x z'_x - y z'_y = y^2$ thỏa $z'_x(x,2) = 3z'_y(x,2)$.

j) $z'_x + z'_y = z$ biết rằng nó chứa đường cong $x + y = 1, x^2 - y^2 = z$.

k) $z'_x + z'_y = z$ biết rằng nó chứa đường cong $x^2 + z^2 = a^2, y = 0$.

l) $z'_x + z'_y = z$ biết rằng nó chứa đường cong $z = \sin x, y = 0$.

m) $yzz'_x + xzz'_y = -2xy$ biết nó chứa đường tròn $z = 3, x^2 + y^2 = 16$

3.5.2 Ứng dụng của phương trình đạo hàm riêng cấp một

Bài 4. Tìm phương trình của tất cả các mặt cong có pháp tuyến cắt đường $x = y, z = 1$.

Bài 5. Tìm phương trình của tất cả các mặt cong có tiếp diện đi qua điểm $(0, 0, 1)$. Sau đó, tìm phương trình của mặt cong chứa đường tròn $z = 0, y^2 + x^2 = 1$.

Bài 6. Xác định phương trình của mặt cong vuông góc với ellipsoids

$$\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + z^2 = c^2$$

Bài 7. Tìm thừa số tích phân của phương trình

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

biết rằng

a) $Q'_x - P'_y = Pf(y)$.

b) $Q'_x - P'_y = Qf(x)$.

c) $Q'_x - P'_y = \dfrac{k(xP - yQ)}{xy}$.

d) $Q_x(x, y) - P_y(x, y) = \dfrac{axP(x, y) - byQ(x, y)}{xy}$ với a, b là các hằng số.

Bài 8. Tìm thừa số tích phân và giải các phương trình vi phân sau:

a) $(y + y^2)dx - (x + y^2 + 2xy)dy = 0$

b) $(\ln x - 2xy)dx + (2xy - 2x^2)dy = 0$

c) $xdy + ydx = (y^2 + 3)dy$

d) $xdy + ydx = xy^3dx$

Chương 4

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG TUYẾN TÍNH CẤP HAI THUẦN NHẤT HỆ SỐ HẰNG

4.1. Định nghĩa và phương pháp giải chung

Định nghĩa 4.1. Phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai hệ số hằng số hàm z biến x, y là phương trình có dạng

$$az_{xx} + bz_{xy} + cz_{yy} + Az_x + Bz_y + Cz = 0 \tag{4.1}$$

trong đó a, b, c, A, B, C là các hằng số.

Một số phương pháp chung để giải phương trình (4.1)

4.1.1 Phương pháp đặt ẩn phụ

Đặt $z = e^{\lambda x}g(y)$ hoặc $z = e^{\lambda y}g(x)$ (λ là hằng số tùy ý). Khi đó,

$$z_x = \lambda e^{\lambda x}g(y),\ z_y = e^{\lambda x}g'(y),$$
$$z_{xx} = \lambda^2 e^{\lambda x}g(y),\ z_{xy} = \lambda e^{\lambda x}g'(y),\ z_{yy} = e^{\lambda x}g''(y).$$

$$(z_x = e^{\lambda y}g'(x),\ z_y = \lambda e^{\lambda y}g(x),$$
$$z_{xx} = e^{\lambda y}g''(x),\ z_{xy} = \lambda e^{\lambda y}g'(x),\ z_{yy} = \lambda^2 e^{\lambda y}g(x).)$$

Sau đó, thay vào phương trình (4.1) thì ta được phương trình theo hàm $g(y)$. Giải phương trình này tìm hàm $g(y)$ ($g(x)$) và suy ra nghiệm của phương trình (4.1).

Ví dụ 4.1. Để giải phương trình $z_{xx} - 2z_{xy} + 3z_{yy} = 0$ theo phương pháp đặt ẩn phụ, ta thực hiện như sau:

Đặt $z = e^{\lambda x} g(y)$ thì

$$z_x = \lambda e^{\lambda x} g(y), \; z_y = e^{\lambda x} g'(y),$$
$$z_{xx} = \lambda^2 e^{\lambda x} g(y), \; z_{xy} = \lambda e^{\lambda x} g'(y), \; z_{yy} = e^{\lambda x} g''(y).$$

Thế vào phương trình trên, ta được

$$e^{\lambda x}\left[3g''(y) - 2\lambda g'(y) + \lambda^2 g(y)\right] = 0$$
$$\iff \quad 3g''(y) - 2\lambda g'(y) + \lambda^2 g(y) = 0$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất hệ số hằng hàm g biến y. Phương trình đặc trưng

$$3k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 = 0 \iff k_{1,2} = \frac{\lambda \pm i\lambda\sqrt{2}}{3}$$

Do đó, ta có nghiệm

$$g(y) = e^{\frac{\lambda}{3}y}\left(c_1 \cos\frac{\lambda\sqrt{2}}{3}y + c_2 \sin\frac{\lambda\sqrt{2}}{3}y\right)$$

Theo nguyên lí chồng chất nghiệm, phương trình đã cho có nghiệm tổng quát

$$z = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} e^{\lambda\left(x+\frac{1}{3}y\right)}\left(c_1 \cos\frac{\lambda\sqrt{2}}{3}y + c_2 \sin\frac{\lambda\sqrt{2}}{3}y\right)$$

* Tương tự, nếu ta đặt $z = e^{\lambda y} g(x)$ thì nghiệm thu được là

$$z = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} e^{\lambda(x+y)}\left(c_1 \cos\lambda\sqrt{2}x + c_2 \sin\lambda\sqrt{2}x\right)$$

4.1.2 Phương pháp tách biến (Phương pháp Fourier)

Đặt $z = XY = X(x)Y(y)$ $\qquad$ ($XY \neq 0$ trong miền xác định).

Khi đó,

$$z_x = X'Y, \; z_y = XY',$$
$$z_{xx} = X''Y, \; z_{xy} = X'Y', \; z_{yy} = XY''.$$

Thay vào phương trình (4.1) ta được phương trình

$$aX''Y + bX'Y' + cXY'' + AX'Y + BXY' + CXY = 0$$

Chia hai vế phương trình cho XY, ta được

$$a\frac{X''}{X} + b\frac{X'}{X}\frac{Y'}{Y} + c\frac{Y''}{Y} + A\frac{X'}{X} + B\frac{Y'}{Y} + C = 0$$

Chúng ta thấy rằng hàm X chỉ phụ thuộc vào biến x, hàm Y chỉ phụ thuộc vào biến y nên nếu chọn tham số λ thích hợp, ta sẽ được phương trình vi phân cấp hai. Giải phương trình này, chúng ta sẽ suy ra nghiệm của phương trình (4.1).

Chú ý thêm rằng, số λ nói trên là hằng số tùy ý nên theo nguyên lí chồng chất nghiệm, về mặt hình thức, nghiệm của phương trình đạo hàm riêng là chuỗi hàm lượng giác mà các số hạng chính là nghiệm của phương trình vi phân ở trên.

Ví dụ 4.2. Giải phương trình $z_{xx} + 4z_{yy} = 0$ bằng phương pháp tách biến, ta tiến hành như sau:

Đặt $z = XY = X(x)Y(y)$ ($XY \neq 0$ trong miền xác định) thì phương trình đã cho trở thành

$$\frac{X''}{X} + 4\frac{Y''}{Y} = 0 \Longleftrightarrow \frac{X''}{X} = -4\frac{Y''}{Y}$$

Vì hàm X chỉ phụ thuộc vào biến x, hàm Y chỉ phụ thuộc vào biến y nên khi lấy đạo hàm hai vế phương trình thu được theo biến x, ta được

$$\left[\frac{X''}{X}\right]' = 0 \Longleftrightarrow \frac{X''}{X} = \lambda \quad (\lambda \text{ là hằng số})$$

Như vậy, phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{X''}{X} &= \lambda, \\ -4\dfrac{Y''}{Y} &= \lambda, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X'' - \lambda X &= 0, \\ 4Y'' + \lambda Y &= 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Đây là hệ hai phương trình tuyến tính cấp hai thuần nhất hệ số hằng. Phương trình đặc trưng của hệ (1) là

$$\begin{cases} k^2 - \lambda &= 0, \\ 4h^2 + \lambda &= 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k^2 &= \lambda, \\ h^2 &= -\dfrac{\lambda}{4}. \end{cases} \qquad (2)$$

Xét ba trường hợp:

$* \ \lambda > 0$: Hệ phương trình (2) có nghiệm $\begin{cases} k &= \pm\sqrt{\lambda}, \\ h &= \pm i\dfrac{\sqrt{\lambda}}{2}. \end{cases}$ Suy ra, hệ phương trình (1) có nghiệm là

$$\begin{cases} X &= c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}. \\ Y &= c_3 \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2}y + c_4 \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2}y. \end{cases}$$

Theo nguyên lí chồng chất nghiệm.

$$z = \sum_{\lambda>0} \left(c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}\right)\left(c_3 \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2}y + c_4 \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2}y\right).$$

$* \ \lambda = 0$: hệ phương trình (1) trở thành $\begin{cases} X'' &= 0, \\ Y'' &= 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X &= ax + b, \\ Y &= cy + d. \end{cases}$

Suy ra nghiệm của phương trình đã cho là $z = (ax + b)(cx + d)$.

$* \ \lambda < 0$: Hệ phương trình (2) có nghiệm $\begin{cases} k &= \pm i\sqrt{-\lambda}, \\ h &= \pm\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{2}. \end{cases}$

Suy ra, hệ phương trình (1) có nghiệm là

$$\begin{cases} X &= c_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{-\lambda}x. \\ Y &= c_3 e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}y} + c_4 e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}y}. \end{cases}$$

Theo nguyên lí chồng chất nghiệm,

$$z = \sum_{\lambda<0} \left(c_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{-\lambda}x\right)\left(c_3 e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}y} + c_4 e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}y}\right).$$

4.2. Một số bài toán biên trị

Phương pháp giải chung cho các bài toán này là dùng phương pháp tách biến rồi giao với các điều kiện biên để suy ra nghiệm của phường trình đã cho.

4.2.1 Phương trình Laplace (Bài toán Dirichlet trong hình chữ nhật)

Là bài toán biên trị có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} & = 0, \quad 0 < x < a, 0 < y < b. \quad (\bullet) \\ z(0, y) & = z(a, y) = z(x, b) = 0. \quad (1) \\ z(x, 0) & = f(x) \quad (2) \end{cases} \tag{4.2}$$

trong đó, $f(x)$ là hàm liên tục cho trước.

Để giải bài toán này, ta dùng phương pháp tách biến $z(x, y) = X(x)Y(y)$ ($X(x)Y(y) \neq 0$ trong miền xác định). Khi đó, phương trình $(\bullet)$ trở thành

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \text{ hay } \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

với λ là hằng số tùy ý. Từ đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} X'' - \lambda X & = 0. \\ Y'' + \lambda Y & = 0. \end{cases}$$

với các điều kiện biên tương ứng với điều kiện (1) là

$$\begin{cases} z(0, y) & = 0 \Longrightarrow X(0)Y(y) = 0 \Longrightarrow X(0) = 0. \\ z(a, y) & = 0 \Longrightarrow X(a)Y(y) = 0 \Longrightarrow X(a) = 0. \\ z(x, b) & = 0 \Longrightarrow X(x)Y(b) = 0 \Longrightarrow Y(b) = 0. \end{cases}$$

$*$ Xét phương trình $X'' - \lambda X = 0$ với điều kiện biên $X(0) = 0, X(a) = 0$.

Phương trình đặc trưng là $k^2 - \lambda = 0$ hay $k^2 = \lambda$. Có ba trường hợp:

$+ \lambda > 0$: $k = \pm\sqrt{\lambda}$ nên ta được $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$.

Kết hợp với điều kiện biên $X(0) = 0, X(a) = 0$, ta có

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 0, \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}a} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}a} & = 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_2 & = -c_1, \\ c_1\left(e^{2\sqrt{\lambda}a} - 1\right) & = 0, \end{cases} \Longleftrightarrow c_1 = c_2 = 0$$

Vậy $X(x) = 0$ (loại).

$+ \lambda = 0$: $X'' = 0$ nên ta được $X(x) = d_1 x + d_2$. Kết hợp với điều kiện biên $X(0) = 0, X(a) = 0$, ta suy ra $d_1 = d_2 = 0$ hay $X(x) = 0$ (loại).

$+ \lambda < 0$: $k = \pm i\sqrt{-\lambda}$ nên ta được $X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\sin\sqrt{-\lambda}x$

Kết hợp với điều kiện biên $X(0) = 0, X(a) = 0$, ta có

$$\begin{cases} A &= 0, \\ B\sin\sqrt{-\lambda}a &= 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A &= 0, \\ \sin\sqrt{-\lambda}a &= 0. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A &= 0, \\ \sqrt{-\lambda}a &= n\pi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ \lambda = -\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}, n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Suy ra

$$X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{a}x, \ n = 1, 2, \ldots$$

Như vậy, phương trình $X'' - \lambda X = 0$ với điều kiện biên $X(0) = 0, X(a) = 0$ chỉ có nghiệm không tầm thường khi $\lambda < 0$, đồng thời nghiệm cho bởi công thức

$$X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{a}x, \ n = 1, 2, \ldots$$

$*$ Bây giờ, chúng ta xét phương trình $Y'' + \lambda Y = 0$ khi $\lambda = -\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}$ thì ta có phương trình

$$Y'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y = 0$$

với nghiệm là

$$Y_n(y) = C_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + D_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

Kết hợp với điều kiện $Y(b) = 0$ cho ta $C_n e^{\frac{n\pi}{a}b} + D_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} = 0$ hay $D_n = -C_n e^{2\frac{n\pi}{a}b}$. Khi đó,

$$Y_n(y) = C_n\left(e^{\frac{n\pi}{a}y} - e^{2\frac{n\pi}{a}b}e^{-\frac{n\pi}{a}y}\right) = 2C_n e^{-\frac{n\pi}{a}b}\text{sh}\,\frac{n\pi}{a}(y - b)$$

Vậy theo nguyên lí chồng chất nghiệm thì nghiệm của phương trình đã cho là

$$z(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\frac{n\pi}{a}x\text{sh}\,\frac{n\pi}{a}(y - b)$$

với $E_n = 2B_nC_ne^{-\frac{n\pi}{a}b}$.

Kết hợp với điều kiện (2) : $z(x, 0) = f(x)$ ta có

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n\text{sh}\,\frac{-n\pi b}{a}\sin\frac{n\pi}{a}x$$

Đây là khai triển Fourier sin của hàm $f(x)$ trên $(0, a)$ nên ta có

$$E_n \operatorname{sh}\frac{-n\pi b}{a} = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx$$

Vậy nghiệm của bài toán đã cho là

$$z(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a\operatorname{sh}\frac{-n\pi b}{a}}\left(\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx\right)\sin\frac{n\pi}{a}x\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}(y-b)$$

$$(0 < x < a, 0 < y < b)$$ □

4.2.2 Phương trình sóng (Bài toán Cauchy)*

Là bài toán biên trị có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad c > 0, 0 < x < l, t > 0 \quad (*), \\ z(0,t) &= z(l,t) = z_t(x,0) = 0, \quad (1) \\ z(x,0) &= f(x). \qquad (2) \end{cases} \tag{4.3}$$

Bằng phương pháp tách biến, ta giả sử nghiệm tìm được dưới dạng

$$z(x,t) = X(x)T(t) \quad (X(x)T(t) \neq 0 \text{ trong miền xác định})$$

Khi đó phương trình $(*)$ trở thành

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \lambda \Longleftrightarrow \begin{cases} X'' - \lambda X = 0, \\ T'' - \lambda c^2 T = 0. \end{cases}$$

với λ là hằng số tùy ý.

Các điều kiện biên tương ứng với điều kiện (1) là

$$\begin{cases} z(0,t) &= 0 \Longrightarrow X(0)T(t) = 0 \Longrightarrow X(0) = 0, \\ z(l,t) &= 0 \Longrightarrow X(l)T(t) = 0 \Longrightarrow X(l) = 0, \\ z_t(x,0) &= 0 \Longrightarrow X(x)T'(0) = 0 \Longrightarrow T'(0) = 0. \end{cases}$$

* Xét phương trình $X'' - \lambda X = 0$ với điều kiện biên $X(0) = 0, X(l) = 0$, ta thấy rằng, phương trình này chỉ có nghiệm không tầm thường khi $\lambda < 0$ hay $\lambda = -\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$, và khi đó

$$X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \; n = 1, 2, \ldots$$

• Với $\lambda = -\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$ thì phương trình $T'' - \lambda c^2 T = 0$ sẽ có nghiệm tổng quát là

$$T(t) = C_n \cos\frac{cn\pi}{l}t + D_n \sin\frac{cn\pi}{l}t$$

Mặt khác, từ điều kiện $T'(0) = 0$ với $T'(t) = -C_n\dfrac{cn\pi}{l}\sin\dfrac{cn\pi}{l}t + D_n\dfrac{cn\pi}{l}\cos\dfrac{cn\pi}{l}t$ cho ta $D_n = 0$. Vậy

$$T(t) = C_n \cos\frac{cn\pi}{l}t$$

Từ đó, theo nguyên lí chồng chất nghiệm, ta được

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\frac{n\pi}{l}x \cos\frac{cn\pi}{l}t$$

trong đó $E_n = B_n C_n$.

Cuối cùng, kết hợp với điều kiện (2) ta suy ra

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

Do đó

$$E_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

Vậy nghiệm của bài toán đã cho là

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\Big(\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\Big)\sin\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{cn\pi}{l}t$$

$$(0 < x < l, t > 0)$$

□

4.2.3 Phương trình truyền nhiệt

Là bài toán biên trị có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k}\dfrac{\partial z}{\partial t}, & 0 < x < l, t > 0, \ (*) \\ z(0,t) = z(l,t) = 0, & (1) \\ z(x,0) = f(x). & (2) \end{cases} \tag{4.4}$$

trong đó, k là hằng số, $f(x)$ là hàm số cho trước.

Tương tự như hai bài toán trên, ta đặt

$$z(x,t) = X(x)T(t) \quad (X(x)T(t) \neq 0 \text{ trong miền xác định})$$

Khi đó phương trình (*) trở thành

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k}\frac{T'}{T} = \lambda \Longleftrightarrow \begin{cases} X'' - \lambda X = 0, \\ T' - \lambda k T = 0. \end{cases}$$

với λ là hằng số tùy ý.

Các điều kiện biên tương ứng với điều kiện (1) là

$$\begin{cases} z(0,t) = 0 \Longrightarrow X(0)T(t) = 0 \Longrightarrow X(0) = 0, \\ z(l,t) = 0 \Longrightarrow X(l)T(t) = 0 \Longrightarrow X(l) = 0. \end{cases}$$

Theo trên, phương trình $X'' - \lambda X = 0$ với điều kiện $X(0) = 0, X(l) = 0$ sẽ có nghiệm là

$$X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \; n = 1, 2, \ldots$$

ứng với $\lambda = -\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$.

Xét phương trình $T' - \lambda k T = 0$ với $\lambda = -\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$, ta được

$$T' + \frac{n^2\pi^2}{l^2}kT = 0 \Longleftrightarrow T = C_n e^{-\int \frac{n^2\pi^2}{l^2}k dt}$$

hay

$$T(t) = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}kt}, \; n = 1, 2, \ldots$$

Theo nguyên lí chồng chất nghiệm, ta có nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{l}x e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}kt}$$

trong đó $D_n = B_n C_n, n = 1, 2, \ldots$

Sau cùng, kết hợp với điều kiện (2) thì

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

Từ đó, ta có

$$D_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

Vậy nghiệm của bài toán đã cho là

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\Big(\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\Big)\sin\frac{n\pi}{l}x\,e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}kt}$$

$$(0 < x < l, t > 0)$$ □

4.3. Công thức tích phân Poisson

4.3.1 Bài toán Dirichlet trong nửa mặt phẳng

Nghiệm của bài toán Dirichlet trong nửa mặt phẳng trên

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & = 0 \quad (y > 0), \\ u(x,0) & = \varphi(x) \end{cases} \tag{4.5}$$

là hàm số điều hòa $u(x,y)$ cho bởi công thức

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yu(t,0)}{(t-x)^2+y^2}dt \quad (y > 0)$$

Chứng minh

Trước hết, ta để ý rằng hàm phức $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ giải tích khi và chỉ khi các hàm $u(x,y), v(x,y)$ thỏa điều kiện Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}, \end{cases}$$

hay u, v là các hàm số điều hòa (thỏa phương trình Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$).

Xét hàm phức $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ giải tích trong nửa mặt phẳng trên sao cho

$$|z^\alpha f(z)| < M \quad (\alpha > 0)$$

Kí hiệu (C_R) là nửa trên đường tròn tâm tại gốc tọa độ O, bán kính R. Gọi $(C) = (C_R) \cup [-R, R]$ (với R đủ lớn để (C) bao $z = x + iy$).

Theo công thức tích phân Cauchy, ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(t)}{t - z}dt \tag{4.6}$$

Khi đó, do $\bar{z} = x - iy$ ở ngoài (C) nên

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(t)}{t - \bar{z}}dt \tag{4.7}$$

Lấy (4.6) trừ (4.7), vế với vế ta được

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \left[\frac{1}{t - z} - \frac{1}{t - \bar{z}}\right] f(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{(z - \bar{z})f(t)}{(t - z)(t - \bar{z})}dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{(z - \bar{z})f(t)}{t^2 - (z + \bar{z})t + z\bar{z}}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{2iyf(t)}{t^2 - 2xt + x^2 + y^2}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{(C)} \frac{yf(t)}{(t - x)^2 + y^2}dt \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} \frac{yf(t)}{(t - x)^2 + y^2}dt + \frac{1}{\pi}\int_{(C_R)} \frac{yf(t)}{(t - x)^2 + y^2}dt$$

Để (C) bao hết nửa mặt phẳng trên, ta cho $R \to +\infty$. Khi đó, tích phân

$$I = \int_{(C_R)} \frac{yf(t)}{(t - x)^2 + y^2}dt \to 0$$

bởi vì

$$\begin{aligned} I &= \int_{(C_R)} \frac{yf(t)t^\alpha}{[(t - x)^2 + y^2]t^\alpha}dt \\ \Longrightarrow \quad |I| &\leq y\int_{(C_R)} \frac{|t^\alpha f(t)|}{|t^\alpha| \cdot |(t - x)^2 + y^2|}dt \\ &< yM\int_{(C_R)} \frac{dt}{|t^\alpha| \cdot |(t - x)^2 + y^2|} \xrightarrow{R \to \infty} 0 \end{aligned}$$

Do đó, khi cho $R \to +\infty$ thì

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yf(t)}{(t - x)^2 + y^2}dt$$

Thay

$$\begin{cases} f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \\ f(t) = u(t,0) + iv(t,0) \end{cases}$$

vào kết quả trên và tách phần thực ở hai vế, ta được

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yu(t,0)}{(t-x)^2+y^2}dt \quad (y > 0)$$

Ví dụ 4.3. Giải bài toán Dirichlet trong nửa mặt phẳng trên

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (y > 0), \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Ta có nghiệm $u(x,y)$ của bài toán cho bởi công thức tích phân Poisson

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yu(t,0)}{(t-x)^2+y^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{y}{(t-x)^2+y^2}dt$$

$$\Longrightarrow \quad u(x,y) = \frac{y}{\pi}\cdot\frac{1}{y}\arctan\frac{t-x}{y}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{x}{y}\right]$$

Chú ý 4.1. Chúng ta đã biết mối liên hệ giữa tọa độ Đề Các và tọa độ cực là

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Với phép đổi biến này, ta dễ dàng nhận được công thức toán tử Laplace của hàm $u(x,y)$ trong tọa độ cực là

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

4.3.2 Bài toán Dirichlet trong hình tròn

Nghiệm của bài toán Dirichlet trong hình tròn tâm O bán kính R

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (r < R) \\ u(R,\varphi) = \psi(\varphi) \end{cases} \tag{4.8}$$

là hàm số điều hòa $u(r,\theta)$ cho bởi một trong hai công thức

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2-r^2)u(R,\varphi)}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi \quad (r<R)$$

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(R^2-r^2)u(R,\varphi)}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi \quad (r<R)$$

Chứng minh

* Xét số phức z trong đường tròn (C), $z = re^{i\theta}$ $(r<R)$. Ta có:

• $\bar{z} = re^{-i\theta}$.

• Điểm đối xứng của z qua đường tròn: $z_1 = \dfrac{R^2}{\bar{z}} = \dfrac{R^2}{r}e^{i\theta}$

• $t \in (C)$ thì $t = Re^{i\varphi}$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$ và $dt = Re^{i\varphi}d\varphi$.

Gọi $f(z)$ là hàm giải tích trong (C). Theo công thức tích phân Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(t)}{t-z}dt \tag{4.9}$$

Do z_1 ở ngoài (C) nên

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(t)}{t-z_1}dt \tag{4.10}$$

Lấy (4.9) trừ (4.10), vế với vế ta được

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-z_1}\right]f(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{(z-z_1)f(t)}{(t-z)(t-z_1)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{(z-z_1)f(t)}{t^2-(z+z_1)t+zz_1}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{(r^2-R^2)\frac{1}{r}e^{i\theta}f(Re^{i\varphi})}{R^2e^{2i\varphi}-(r^2+R^2)\frac{1}{r}e^{i\theta}Re^{i\varphi}+R^2e^{2i\theta}}Re^{i\varphi}d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r^2-R^2)e^{i(\varphi+\theta)}f(Re^{i\varphi})}{Rr(e^{2i\varphi}+e^{2i\theta})-(r^2+R^2)e^{i(\varphi+\theta)}}d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2-r^2)f(Re^{i\varphi})}{(R^2+r^2)-Rr\left(e^{i(\varphi-\theta)}+e^{-i(\varphi-\theta)}\right)}d\varphi
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2-r^2)f(Re^{i\varphi})}{(R^2+r^2)-2Rr\cos(\varphi-\theta)}d\varphi$$

Thay

$$\begin{cases} f(z) &= f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta) \\ f(t) &= f(Re^{i\varphi}) = u(R,\varphi) + iv(R,\varphi) \end{cases}$$

vào kết quả trên và tách phần thực ở hai vế, ta được

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R,\varphi)d\varphi}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + r^2} \quad (r < R)$$

* Cũng chú ý thêm rằng, đối với phương trình Laplace trong bài toán trên, nếu chúng ta dùng phương pháp tách biến $u(r,\varphi) = \Psi(r)\Phi(\varphi)$ thì ta cũng tìm được nghiệm của bài toán dạng

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R,\varphi)}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + r^2}d\varphi \quad (r < R)$$ □

Ví dụ 4.4. Giải bài toán Dirichlet trong hình tròn đơn vị

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (r < 1) \\ u(1,\varphi) = \begin{cases} 1 \ , \ 0 \le \varphi \le \pi, \\ 0 \ , \ \pi < \varphi \le 2\pi. \end{cases} \end{cases}$$

Áp dụng công thức tích phân Poisson trong hình tròn đơn vị, ta có nghiệm của bài toán được cho bởi

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2)u(1,\varphi)d\varphi}{1 - 2r\cos(\varphi - \theta) + r^2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{(1 - r^2)d\varphi}{(1 + r^2) - 2r\cos(\varphi - \theta)} \end{aligned}$$

Đặt $\quad t = \tan\dfrac{\varphi - \theta}{2} \quad \Longrightarrow \quad dt = \dfrac{1}{2}\left[1 + \tan^2\dfrac{\varphi - \theta}{2}\right]d\varphi \quad \Longrightarrow \quad d\varphi = \dfrac{2dt}{1 + t^2}.$

Đồng thời $\quad \cos(\varphi - \theta) = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$. Do đó,

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\tan\frac{\theta}{2}}^{\cot\frac{\theta}{2}} \frac{2dt}{(1+t^2)\left[(1+r^2)-2r\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right]}\\
&= \frac{1-r^2}{\pi}\int_{-\tan\frac{\theta}{2}}^{\cot\frac{\theta}{2}} \frac{dt}{(1+r^2)(1+t^2)-2r(1-t^2)}\\
&= \frac{1-r^2}{\pi}\int_{-\tan\frac{\theta}{2}}^{\cot\frac{\theta}{2}} \frac{dt}{(1+r)^2t^2+(1-r)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1-r^2}{\pi(1+r)^2}\int_{-\tan\frac{\theta}{2}}^{\cot\frac{\theta}{2}} \frac{dt}{t^2+\left(\dfrac{1-r}{1+r}\right)^2}\\
&= \frac{1}{\pi}\arctan\frac{1+r}{1-r}t\Big|_{-\tan\frac{\theta}{2}}^{\cot\frac{\theta}{2}}\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\cot\frac{\theta}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{\theta}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

4.4. BÀI TẬP

Bài 1. Dùng phương pháp tách biến hoặc phương pháp đặt ẩn phụ, giải các phương trình sau đây:

a) $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$.

b) $z''_{xx} - z'_y = 0$.

c) $z''_{xx} + z''_{yy} + z = 0$.

d) $z''_{xx} + z''_{yy} + z'_x + 2z'_y = 0$.

Bài 2. Giải phương trình Laplace sau đây

a)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+z = 0, & 0<x<1, 0<y<1,\\
z(0,y) = z(x,0) = \dfrac{\partial z}{\partial x}(1,y) = 0, & \\
z(x,1) = x &
\end{cases}
$$

Đs: $z(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}x\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}\sqrt{(2n+1)^2\pi^2-4y}$ với

$$E_n=\frac{(-1)^n 8}{(2n+1)^2\pi^2\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}\sqrt{(2n+1)^2\pi^2-4}}.$$

b)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 0, \quad 0<x<a, 0<y<b,\\ z(0,y) &= z(x,0)=z(x,b)=0,\\ z(a,y) &= f(y)\end{cases}$$

trong đó, $f(y)$ là hàm liên tục cho trước.

Ds: $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\mathrm{sh}\,\frac{n\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}$ với $E_n=\frac{2}{b\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi a}{b}}\int_0^b f(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy.$

Bài 3. Giải bài toán phương trình sóng (4.3) trong các trường hợp sau:

a) $c=1, l=1, f(x)=\sin\pi x+\frac{1}{3}\sin 3\pi x.$

Đs: $z(x,t)=\sin\pi x\cos\pi t+\frac{1}{3}\sin 3\pi x\cos 3\pi t.$

b) $c=1, l=1, f(x)=1.$

Đs: $z(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\pi x\cos(2n-1)\pi t.$

c) $l=1, f(x)=\begin{cases}\varepsilon x & (0\le x\le \frac{1}{2})\\ \varepsilon(1-x) & (\frac{1}{2}\le x\le 1)\end{cases}.$

Ds: $z(x,t)=\frac{4\varepsilon}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)\pi x\cos(2n-1)\pi ct.$

d) $l=\pi, f(x)=\frac{1}{\pi}x(\pi-x).$

Ds: $z(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x\cos(2n-1)ct.$

e) $l=\pi, f(x)=\begin{cases}\dfrac{2ax}{\pi} & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{2a(\pi-x)}{\pi} & \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$

Đs: $$z(x,t) = \frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x\cos(2n-1)ct.$$

Bài 4. Giải phương trình truyền nhiệt (4.4) trong các trường hợp sau:

a) $k = 1, l = 1, f(x) = \sin\pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x.$

Đs:. $$z(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin\pi x + \frac{1}{3}e^{-9\pi^2 t}\sin 3\pi x.$$

b) $l = 1, f(x) = 1.$

Đs: $$z(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2 kt}\sin(2n-1)\pi x.$$

Chương 5

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG TUYẾN TÍNH CẤP 2 HỆ SỐ HÀM SỐ

5.1. Định nghĩa, phân loại phương trình và phương pháp giải chung

5.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 5.1. *Phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai hệ số hàm số* của hàm $z(x, y)$ là phương trình có dạng

$$az_{xx} + bz_{xy} + cz_{yy} = f(x, y, z, z_x, z_y) \tag{5.1}$$

trong đó a, b, c là các hàm của x, y và $f(x, y, z, z_x, z_y)$ là hàm của x, y, z, z_x, z_y.
Định nghĩa 5.2. Phương trình vi phân

$$a(dy)^2 - bdxdy + c(dx)^2 = 0 \quad \text{hay} \quad a[y'(x)]^2 - by'(x) + c = 0$$

được gọi là *phương trình vi phân đặc trưng* của phương trình (5.1).
Ví dụ 5.1. Các phương trình sau là phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai không thuần nhất.

a) $z_{xx} + xz_{xy} - 6x^2 z_{yy} = \frac{1}{x} z_x$.

b) $z_{xx} - 4xz_{xy} + 4x^2 z_{yy} = 0$.

c) $z_{xx} + y^2 z_{yy} = -yz_y$.

5.1.2 Phân loại phương trình

Xét phương trình (5.1) và đặt $\Delta = b^2 - 4ac$. Khi đó,

(i) Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình (5.1) được gọi là phương trình thuộc loại *Hyperbolic.*

(ii) Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (5.1) được gọi là phương trình thuộc loại *Parabolic.*

(iii) Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình (5.1) được gọi là phương trình thuộc loại *Elliptic.*

Ví dụ 5.2. Xét các phương trình ở ví dụ 5.1, ta có,

a) $z_{xx} + xz_{xy} - 6x^2 z_{yy} = \frac{1}{x} z_x$ là phương trình thuộc loại Hyperbolic. Thật vậy, phương trình có $a = 1, b = x, c = -6x^2$ nên với điều kiện $x \neq 0$ thì $\Delta = 25x^2 > 0$.

b) $z_{xx} - 4xz_{xy} + 4x^2 z_{yy} = 0$ là phương trình thuộc loại Parabolic. Bởi vì ta có $a = 1, b = -4x, c = 4x^2$ nên $\Delta = 0$.

c) $z_{xx} + y^2 z_{yy} = -yz_y$ có $a = 1, b = 0, c = y^2$ suy ra $\Delta = -4y^2$. Do đó, đây là phương trình thuộc loại Parabolic nếu $y = 0$, là phương trình thuộc loại Elliptic nếu $y \neq 0$.

Định nghĩa 5.3. Dạng chính tắc của phương trình (5.1).

- Phương trình dạng

$$z_{xy} = F(x, y, z, z_x, z_y)$$

được gọi là phương trình chính tắc loại Hyperbolic.

- Phương trình dạng

$$z_{yy} = F(x, y, z, z_x, z_y)$$

được gọi là phương trình chính tắc loại Parabolic.

- Phương trình dạng

$$z_{xx} + z_{yy} = F(x, y, z, z_x, z_y)$$

được gọi là phương trình chính tắc loại Elliptic.

Chúng ta nhận thấy rằng dạng chính tắc của phương trình (5.1) khá đơn giản và có thể giải được bằng phương pháp tích phân trực tiếp hoặc phương pháp tách biến dễ dàng hơn so với phương trình dạng (5.1).

5.1.3 Phương pháp đưa phương trình (5.1) về dạng chính tắc

Trước hết, chúng ta thấy rằng với phép biến đổi

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases}$$

trong đó, $u(x,y), v(x,y)$ là hai hàm số độc lập tuyến tính, thì ta sẽ được phương trình đạo hàm riêng cấp hai của hàm z theo u, v cùng loại với phương trình ban đầu.

Ta có

$$\begin{aligned}
z_x &= z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x, \\
z_y &= z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y, \\
z_{xx} &= \Big[\big(z_{uu} \cdot u_x + z_{uv} \cdot v_x\big) \cdot u_x + z_u \cdot u_{xx}\Big] + \Big[\big(z_{vu} \cdot u_x + z_{vv} \cdot v_x\big) \cdot v_x + z_v \cdot v_{xx}\Big], \\
z_{xy} &= \Big[\big(z_{uu} \cdot u_y + z_{uv} \cdot v_y\big) \cdot u_x + z_u \cdot u_{xy}\Big] + \Big[\big(z_{vu} \cdot u_y + z_{vv} \cdot v_y\big) \cdot v_x + z_v \cdot v_{xy}\Big], \\
z_{yy} &= \Big[\big(z_{uu} \cdot u_y + z_{uv} \cdot v_y\big) \cdot u_y + z_u \cdot u_{yy}\Big] + \Big[\big(z_{vu} \cdot u_y + z_{vv} \cdot v_y\big) \cdot v_y + z_v \cdot v_{yy}\Big]
\end{aligned}$$

Khi đó, thay vào phương trình (5.1) và rút gọn ta được phương trình có dạng

$$\alpha z_{uu} + \beta z_{uv} + \gamma z_{vv} + \delta z_u + \varepsilon z_v = F(u, v, z, z_u, z_v) \tag{5.2}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
\alpha &= a(u_x)^2 + bu_x u_y + c(u_y)^2, \\
\beta &= 2au_x v_x + b(u_x v_y + u_y v_x) + 2cu_y v_y, \\
\gamma &= a(v_x)^2 + bv_x v_y + c(v_y)^2, \\
\delta &= au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy}, \\
\varepsilon &= av_{xx} + bv_{xy} + cv_{yy}
\end{aligned}$$

Qua đó, chúng ta thấy rằng nếu ta chọn được phép đổi biến thích hợp thì ta có thể đưa phương trình (5.1) về dạng chính tắc.

• **Bổ đề về nghiệm của phương trình đạo hàm riêng cấp một và phương trình vi phân cấp một.** Cho hàm số $u(x,y)$ có các đạo hàm riêng u_x, u_y không đồng thời bằng không. Khi đó, hàm số $u(x,y)$ là nghiệm của phương trình đạo hàm riêng

$$a(u_x)^2 + bu_x u_y + c(u_y)^2 = 0 \tag{5.3}$$

khi và chỉ khi hệ thức $u(x,y)=k$ là nghiệm của phương trình vi phân

$$a[y'(x)]^2 - by'(x) + c = 0 \tag{5.4}$$

Chứng minh

Ta giả thiết $u_y \neq 0$.

($\Rightarrow$) Từ hệ thức $u(x,y)=k$ ta có $y'(x) = -\dfrac{u_x}{u_y}$. Khi đó, nếu $u(x,y)$ là nghiệm của phương trình (5.3) thì chia hai vế cho $(u_y)^2$, ta được

$$\begin{aligned}
& a\Big(\frac{u_x}{u_y}\Big)^2 + b\Big(\frac{u_x}{u_y}\Big) + c = 0,\\
\Longleftrightarrow\quad & a[-y'(x)]^2 + b[-y'(x)] + c = 0,\\
\Longleftrightarrow\quad & a[y'(x)]^2 - by'(x) + c = 0
\end{aligned}$$

Vậy, hệ thức $u(x,y)=k$ là nghiệm của phương trình (5.4).

($\Leftarrow$) Ngược lại, thay $y'(x) = -\dfrac{u_x}{u_y}$ vào phương trình (5.4), ta được

$$\begin{aligned}
& a\Big(-\frac{u_x}{u_y}\Big)^2 - b\Big(-\frac{u_x}{u_y}\Big) + c = 0,\\
\Longleftrightarrow\quad & a\Big(\frac{u_x}{u_y}\Big)^2 + b\Big(\frac{u_x}{u_y}\Big) + c = 0,\\
\Longleftrightarrow\quad & a(u_x)^2 + bu_xu_y + c(u_y)^2 = 0
\end{aligned}$$

hay $u(x,y)$ là nghiệm của phương trình (5.3). □

Theo bổ đề trên, ta có thể chọn được phép đổi biến thích hợp dựa vào dạng nghiệm của phương trình vi phân đặc trưng (5.4) của phương trình (5.1) để đưa phương trình (5.1) về dạng chính tắc. Cụ thể như sau:

5.2. Cách giải phương trình loại Hyperbolic

Giả sử phương trình (5.1) thuộc loại Hyperbolic thì phương trình vi phân đặc trưng (5.4) có hai nghiệm phân biệt

$$y'(x) = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (\Delta = b^2 - 4ac)$$

Giải hai phương trình này, chúng ta tìm được nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} u(x,y) = k_1, \\ v(x,y) = k_2 \end{array}\right.$$

Khi đó, bằng phép đổi biến số $\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y), \end{cases}$ ta sẽ đưa phương trình loại Hyperbolic (5.1) về dạng chính tắc

$$z_{uv} = F(u, v, z, z_u, z_v)$$

bởi vì theo bổ đề trên, $\alpha = \gamma = 0$.

Ví dụ 5.3. Theo ví dụ 5.2 a) phương trình $z_{xx} + xz_{xy} - 6x^2 z_{yy} = \frac{1}{x} z_x$ là phương trình thuộc loại Hyperbolic. Khi đó, phương trình vi phân đặc trưng

$$[y'(x)]^2 - xy'(x) - 6x^2 = 0$$

có $\Delta = 25x^2 > 0$ $(x \neq 0)$ nên có hai nghiệm phân biệt là

$$\left[\begin{array}{lcl} y'(x) & = & 3x, \\ y'(x) & = & -2x, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{lcl} y & = & 3\frac{x^2}{2} + k_1, \\ y & = & -x^2 + k_2, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{lcl} y - \frac{3x^2}{2} & = & k_1, \\ y + x^2 & = & k_2, \end{array}\right.$$

Đặt $\begin{cases} u = y - \frac{3x^2}{2}, \\ v = y + x^2, \end{cases}$ thì ta có

$$u_x = -3x, u_y = 1, u_{xx} = -3, u_{xy} = u_{yy} = 0$$
$$v_x = 2x, v_y = 1, v_{xx} = 2, v_{xy} = v_{yy} = 0$$

nên

$+ \ \alpha = \gamma = 0$

$+ \ \beta = 2au_x v_x + b(u_x v_y + u_y v_x) + 2cu_y v_y = -25x^2$

$+ \ \delta = au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = -3$

$+ \ \varepsilon = av_{xx} + bv_{xy} + cv_{yy} = 2$

$+$ VP$= \frac{1}{x} z_x = \frac{1}{x}(z_u u_x + z_v v_x) = -3z_u + 2z_v$

Thế vào phương trình (5.2), ta được

$$
\begin{aligned}
& -25x^2 z_{uv} - 3z_u + 2z_v = -3z_u + 2z_v. \\
\Longleftrightarrow \quad & -25x^2 z_{uv} = 0, \\
\Longleftrightarrow \quad & z_{uv} = 0 \quad (x \neq 0) \\
\Longleftrightarrow \quad & z_u = c(u) \\
\Longleftrightarrow \quad & z = \int c(u)du + c_1(v) = \varphi(u) + \psi(v)
\end{aligned}
$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$z(x, y) = \varphi(y - \frac{3x^2}{2}) + \psi(y + x^2)$$

trong đó, φ và ψ là các hàm tùy ý khả vi.

5.3. Cách giải phương trình loại Parabolic

Cho phương trình (5.1) thuộc loại Parabolic thì phương trình vi phân đặc trưng (5.4) có nghiệm kép $y'(x) = \dfrac{b}{2a}$ (vì $\Delta = 0$).

Giải phương trình này, chúng ta tìm được nghiệm $u(x, y) = k$. Khi đó, đặt

$$\begin{cases} u = u(x, y). \\ v = x \quad \text{hoặc} \quad v = y, \end{cases}$$

thì theo bổ đề trên $\alpha = 0$, đồng thời tính được $\beta = 0$. Do đó, phương trình loại Parabolic dạng (5.1) sẽ được đưa về dạng chính tắc

$$z_{vv} = F(u, v, z, z_u, z_v)$$

Ví dụ 5.4. Xét phương trình cho ở ví dụ 5.2 b), ta có $z_{xx} - 4xz_{xy} + 4x^2 z_{yy} = 0$ là phương trình thuộc loại Parabolic. Do đó phương trình vi phân đặc trưng

$$[y'(x)]^2 + 4xy'(x) + 4x^2 = 0$$

có nghiệm kép là $y'(x) = -2x$ hay $y = -x^2 + k$ suy ra $y + x^2 = k$.

Đặt $\begin{cases} u = y + x^2, \\ v = x, \end{cases}$ thì ta có

$$u_x = 2x, u_y = 1, u_{xx} = 2, u_{xy} = u_{yy} = 0$$
$$v_x = 2, v_y = 0, v_{xx} = v_{xy} = v_{yy} = 0$$

Khi đó,

$+\ \alpha = \beta = 0$

$+\ \gamma = a(v_x)^2 + bv_{xy} + c(v_y)^2 = 1$

$+\ \delta = au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = 2$

$+\ \varepsilon = av_{xx} + bv_{xy} + cv_{yy} = 0$

+ VP=0

Thế vào phương trình (5.2), ta được $z_{vv} + 2z_u = 0 \quad (*)$. Để giải phương trình này, ta đặt $z = e^{\lambda v}g(u)$ thì

$$z_u = e^{\lambda v}g'(u),\ z_v = \lambda e^{\lambda v}g(u),\ z_{vv} = \lambda^2 e^{\lambda v}g(u)$$

Thay vào phương trình trên, ta có

$$\begin{aligned} & \lambda^2 e^{\lambda v}g(u) + 2e^{\lambda v}g'(u) = 0, \\ \Longleftrightarrow\quad & g'(u) + \frac{\lambda^2}{2}g(u) = 0, \\ \Longleftrightarrow\quad & g(u) = ce^{-\int \frac{\lambda^2}{2}du} \\ \Longleftrightarrow\quad & g(u) = ce^{-\frac{\lambda^2}{2}u} \end{aligned}$$

Theo nguyên lí chồng chất nghiệm, phương trình (*) có ngiệm là

$$z = \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} ce^{\lambda v}e^{-\frac{\lambda^2}{2}u} = \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} ce^{\lambda v - \frac{\lambda^2}{2}u}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$z(x, y) = \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} ce^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}(y+x^2)}$$

5.4. Cách giải phương trình loại Elliptic

Nếu phương trình (5.1) thuộc loại Elliptic thì $\Delta < 0$ nên phương trình vi phân đặc trưng (5.4) có hai nghiệm phức liên hợp

$$y'(x) = \frac{b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Giải hai phương trình vi phân này, chúng ta tìm được nghiệm

$$\left[\begin{array}{rcl} u(x,y) + iv(x,y) & = & c_1 \\ u(x,y) - iv(x,y) & = & c_2 \end{array}\right.$$

Khi đó, ta thực hiện phép đổi biến số $\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y), \end{cases}$ thì phương trình loại Elliptic (5.1) sẽ trở thành dạng chính tắc

$$z_{uu} + z_{uu} = F(u, v, z, z_u, z_v)$$

bởi vì với phép biến đổi này, ta tính được hệ số $\alpha = \gamma, \beta = 0$.

Ví dụ 5.5. Xét phương trình $z_{xx} + y^2 z_{yy} = -y z_y$

• Nếu $y = 0$ thì ta có $z_{xx} = 0$ suy ra $z(x,y) = c_1 x + c_2$.

• Nếu $y \neq 0$ thì theo ví dụ 5.2 c), đây là phương trình loại Elliptic. Do đó, phương trình vi phân đặc trưng

$$[y'(x)]^2 + 2y^2 = 0$$

có $\triangle = -4x^2 < 0$ nên có hai nghiệm phức liên hợp là

$$\left[\begin{array}{rcl} y'(x) & = & iy, \\ y'(x) & = & -iy, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rcl} \dfrac{y'(x)}{y} & = & i, \\ \dfrac{y'(x)}{y} & = & -i. \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rcl} \ln y & = & ix + c_3, \\ \ln y & = & -ix + c_4, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rcl} \ln y - ix & = & c_3, \\ \ln y + ix & = & c_4, \end{array}\right.$$

Đặt $\begin{cases} u & = & \ln y, \\ v & = & x, \end{cases}$ thì ta có

$$u_x = 0, u_y = \frac{1}{y}, u_{xx} = u_{xy}, u_{yy} = -\frac{1}{y^2}$$
$$v_x = 1, v_y = 0, v_{xx} = v_{xy} = v_{yy} = 0$$

Khi đó,

$+ \alpha = \gamma = a(v_x)^2 + bv_{xy} + c(v_y)^2 = 1$

$+ \beta = 2au_x v_x + b(u_x v_y + u_y v_x) + 2cu_y v_y = 0$

$+ \delta = au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = -1$

$+\ \varepsilon = av_{xx} + bv_{xy} + cv_{yy} = 0$

$+$ VP$=-yz_y = -y(z_u u_y + z_v v_y) = -z_u$

Thay vào phương trình (5.2), ta được

$$z_{uu} + z_{vv} - z_u = z_u \quad \text{hay} \quad z_{uu} + z_{vv} = 0 \quad (*)$$

Đặt $z = e^{\lambda v} g(u)$ thì

$$z_u = e^{\lambda v} g'(u),\ z_{uu} = e^{\lambda v} g''(u),\ z_v = \lambda e^{\lambda v} g(u),\ z_{vv} = \lambda^2 e^{\lambda v} g(u)$$

Thế vào phương trình $(*)$, ta có

$$\begin{aligned} & e^{\lambda v} g''(u) + \lambda^2 e^{\lambda v} g(u) = 0, \\ \Longleftrightarrow \quad & g''(u) + \lambda^2 g(u) = 0 \end{aligned}$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất hệ số hằng. Phương trình đặc trưng: $k^2 + \lambda^2 = 0 \Longleftrightarrow k = \pm i\lambda$.

Do đó

$$g(u) = d_1 \cos \lambda u + d_2 \sin \lambda u$$

Theo nguyên lí chồng chất nghiệm, phương trình $(*)$ có ngiệm là

$$z = \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} e^{\lambda v}(d_1 \cos \lambda u + d_2 \sin \lambda u)$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$z(x,y) = \sum_{\lambda \in \mathbf{R}} e^{\lambda x}(d_1 \cos \lambda \ln y + d_2 \sin \lambda \ln y)$$

5.5. BÀI TẬP

Bài 1. Bằng cách đưa về dạng chính tắc, giải các phương trình sau:

a) $z''_{xx} + z''_{xy} - 2z''_{yy} = 0$.

b) $z''_{xx} - (m+n)z''_{xy} + mn2z''_{yy} = 0$.

c) $z''_{xx} + 2mz''_{xy} + m^2 z''_{yy} = 0$.

d) $z''_{xx} - 2z''_{xy} + 5z''_{yy} = 0$.

e) $z''_{xx} - 2mz''_{xy} + (m^2 + n^2)z''_{yy} = 0$.

f) $x^2 z''_{xx} + xyz''_{xy} - 2y^2 z''_{yy} = \frac{4}{3}(yz'_y - xz'_x)$.

g) $z''_{xx} - 4xz''_{xy} + 4x^2 z''_{yy} = 2z'_y$

h) $z''_{xx} - 2yz''_{xy} + 5y^2 z''_{yy} + 5yz'_y = 0$.

i) $x^2y^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + z''_{yy} = -x(1+y^2)z'_x$.

Bài 2. Dùng phép biến đổi đã cho ở mỗi bài để giải các phương trình sau:

a) $xu''_{xy} = yu''_{yy} + u'_y$ $(v = x \quad z = xy)$;

b) $u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy} = 0$ $(v = x \quad z = x - y)$;

c) $u''_{xx} - 4u''_{xy} + 3u''_{yy} = 0$ $(v = x + y \quad z = 3x + y)$.